Тяжелый стакан

Задача 2. [ВсОШ 2020/21, региональный этап, 9 класс, задача 2] «Тяжелый стакан».

Внешний радиус цилиндрического стакана, находящегося в высоком аквариуме с шероховатым дном, равен R, высота L, толщина стенок и дна d (см. рис.). Сверху стакан герметично закрыт тонким лёгким диском радиуса R. Плотность жидкости в аквариуме ρ, плотность материала стакана 20ρ.

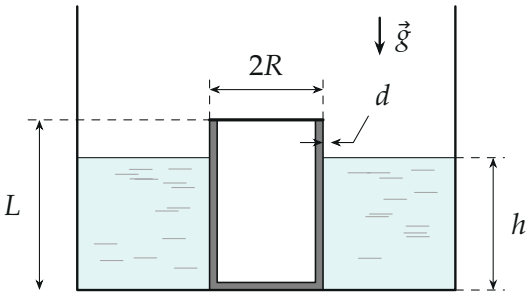

Рис. 1. Рисунок условия.

1. Получите зависимость силы реакции N, с которой стакан действует на дно аквариума, от уровня h налитой в аквариум жидкости. Постройте график зависимости $N(h)$. Укажите на графике характерные точки, выразив их через величины, заданные в условии.
2. При каком соотношении между d и L стакан может всплыть? Считайте, что R фиксировано и выполняется условие $0 < d \leq 0{,}040\,R$.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на закон Архимеда и равновесие тела на дне. Дно аквариума шероховатое — жидкость подтекает под стакан, поэтому давление действует и на его дно снизу, и выталкивающая сила равна весу жидкости в объёме погружённой части. Закрытый стакан вытесняет жидкость всем своим внешним объёмом (внутри воздух). Пока уровень растёт, растёт сила Архимеда и уменьшается сила давления на дно; дальше два сценария: либо сила Архимеда сравняется с силой тяжести раньше, чем жидкость дойдёт до верха, — стакан всплывёт, либо жидкость закроет стакан целиком, и сила Архимеда перестанет расти.

Обозначения. m — масса стакана, $V_{ст}$ — объём его материала, F_A — сила Архимеда, N — сила реакции дна (по третьему закону Ньютона она равна силе, с которой стакан давит на дно), h_0 — уровень, при котором N обращается в ноль.

Пункт 1.

1. Масса стакана. Стенка — свёрнутый в цилиндр лист площадью $2\pi RL$ и толщиной d, дно — круг площадью πR^2 толщиной d. Так как $d \ll R$ (по условию $d \le 0{,}04R$), кольцо $d \times d$ на стыке стенки и дна, учтённое дважды, — поправка порядка d/R, ей пренебрегаем:

$$V_{ст} = 2\pi RLd + \pi R^2 d = \pi dR(2L+R), \qquad m = 20\rho V_{ст} = 20\pi\rho dR(2L+R).$$

2. Силы и равновесие. На стакан действуют сила тяжести $m\vec{g}$ вниз, сила Архимеда $\vec{F}_A$ и реакция дна $\vec{N}$ вверх (рис. 2). Лёгкий диск массы не добавляет. Пока $h \le L$, погружён цилиндр высотой h и радиусом R:

$$F_A = \rho g \pi R^2 h.$$

Второй закон Ньютона для покоящегося стакана в проекции на ось y (вверх):

$$N + F_A - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg - F_A = 20\pi\rho g dR(2L+R) - \pi\rho g R^2 h.$$

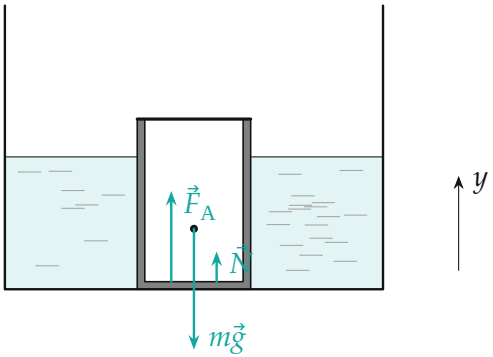

Рис. 2. Силы, действующие на стакан: тяжести $m\vec{g}$, Архимеда $\vec{F}_A$ и реакция дна $\vec{N}$.

3. Характерные точки. При $h = 0$:

$$N_0 = 20\pi\rho g d R(2L + R).$$

$N(h)$ — убывающая прямая с наклоном $\pi\rho g R^2$, не зависящим от d и L. Она обращается в ноль при

$$h_0 = \frac{mg}{\pi\rho g R^2} = \frac{20d(2L + R)}{R}.$$

Если $h_0 > L$, жидкость раньше доходит до верха стакана. При $h = L$

$$N_1 = N_0 - \pi\rho g R^2 L = \pi\rho g R\,(40dL + 20dR - RL),$$

а при $h > L$ стакан погружён целиком, $F_A = \rho g \pi R^2 L$ больше не растёт, и $N = N_1$ остаётся постоянной (рис. 3). Если же $h_0 \le L$, при $h = h_0$ сила реакции обращается в ноль, стакан отрывается от дна и всплывает; дальше $N = 0$ (рис. 4).

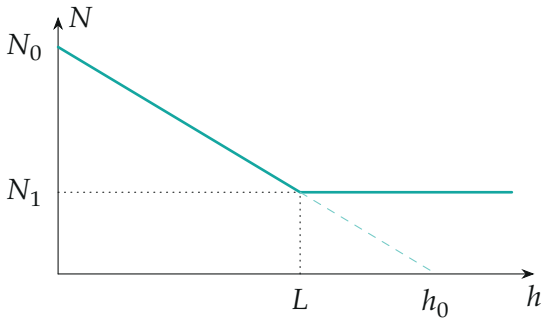

Рис. 3. График $N(h)$ при $h_0 > L$: после $h = L$ сила не меняется, стакан стоит на дне.

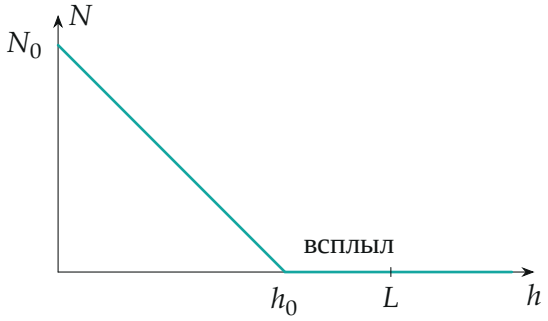

Рис. 4. График $N(h)$ при $h_0 \le L$: при $h = h_0$ стакан отрывается от дна.

Пункт 2.

4. Условие всплытия. Стакан всплывёт, если ноль силы реакции наступает раньше, чем жидкость закроет стакан: $h_0 \le L$,

$$\frac{20d(2L+R)}{R} \le L \quad \Rightarrow \quad 40dL + 20dR \le RL \quad \Rightarrow \quad L\,(R - 40d) \ge 20dR.$$

При $R - 40d > 0$ получаем

$$L \ge \frac{20dR}{R - 40d}.$$

Если же $d \ge R/40$, левая часть не положительна, а правая положительна — неравенство не выполняется ни при какой высоте: стакан не всплывёт никогда. Итог: всплытие возможно только при $d < 0{,}025R$ и достаточно высоком стакане, $L \ge \frac{20dR}{R-40d}$ (рис. 5).

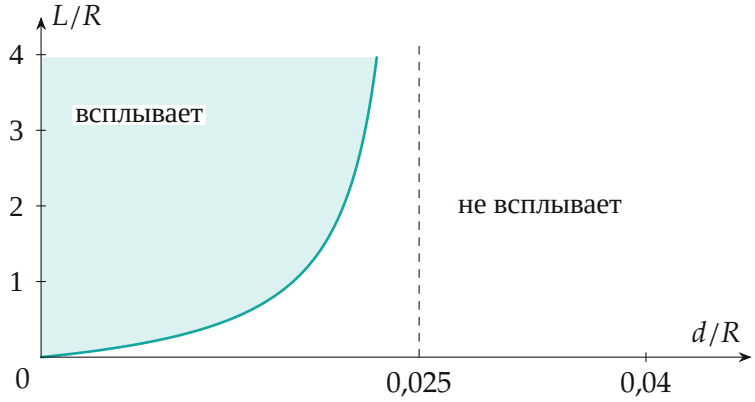

Рис. 5. Область всплытия на плоскости $(d/R;\, L/R)$: граница $L/R = \frac{20\,d/R}{1-40\,d/R}$ уходит вверх при $d \to 0{,}025R$.

Обратите внимание. Смысл ограничения $d < R/40$: при $L \to \infty$ масса растёт за счёт стенки как $40\pi\rho dRL$, а сила Архимеда — как $\pi\rho R^2 L$; стакан бесконечной высоты всплывёт, только если $40d < R$. Короткий стакан тяжелее «на единицу высоты» из-за дна, поэтому ему нужна ещё и достаточная высота.

Ответ. 1) $N(h) = 20\pi\rho gdR(2L+R) - \pi\rho gR^2 h$ до $h = \min(h_0, L)$; характерные точки $N_0 = 20\pi\rho gdR(2L+R)$, $h_0 = \frac{20d(2L+R)}{R}$, $N_1 = \pi\rho gR(40dL + 20dR - RL)$ (при $h_0 > L$ дальше $N = N_1$, при $h_0 \le L$ дальше $N = 0$). 2) $L \ge \frac{20dR}{R-40d}$, что возможно только при $d < 0{,}025R$.

Проверка. Размерность: $[\rho gdRL] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{м}^3 = \text{Н}$. Предел $d \to 0$: $L \ge 0$ — невесомый стакан всплывает при любой высоте. Пример: $d = 0{,}02R$ даёт $L \ge \frac{0{,}4R}{0{,}2} = 2R$; при $L = 2R$: $h_0 = \frac{0{,}4(4R+R)}{1} = 2R = L$ — ровно на границе. Точность упрощённого объёма: точный объём $\pi R^2 L - \pi(R-d)^2(L-d)$ отличается от нашего на $\pi d^2(L+2R)$, т. е. в доле $\sim d/R \le 4\,\%$.

Ответ. 1) $N = 20\pi\rho gdR(2L+R) - \pi\rho gR^2 h$; $N_0 = 20\pi\rho gdR(2L+R)$, $h_0 = \dfrac{20d(2L+R)}{R}$, $N_1 = \pi\rho gR(40dL + 20dR - RL)$ (горизонтальный участок при $h > L$, если $h_0 > L$); 2) $L \ge \dfrac{20dR}{R-40d}$, возможно лишь при $d < 0{,}025R$.