Пять пружинок

Задача 3. [ВсОШ 2020/21, региональный этап, 9 класс, задача 3] «Пять пружинок».

Пять пружинок соединены так, как показано на рисунке, и в исходном состоянии ни одна из них не деформирована. Коэффициенты жёсткости трёх пружин равны k_1, а двух оставшихся — k_2.

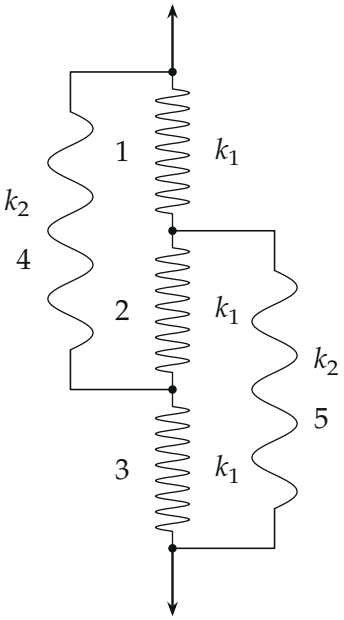

Рис. 1. Рисунок условия.

1. Чему равен эффективный коэффициент жёсткости системы пружин?
2. Систему растягивают, прикладывая к её концам одинаковые силы. При каком соотношении k_1 и k_2 пружина 2 окажется сжатой?

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на закон Гука и равновесие узлов системы пружин. Пружины не соединены ни последовательно, ни параллельно в чистом виде: пружина 4 «обходит» пружины 1 и 2, пружина 5 — пружины 2 и 3. Поэтому считаем через узлы: каждый узел (точка соединения) невесом, и сумма сил пружин на него равна нулю.

Помогает симметрия: схема переходит в себя, если перевернуть её вверх ногами.

Обозначения. Узлы сверху вниз: T, P, Q, B (рис. 2). x_i — удлинение пружины i (отрицательное — сжатие), F — сила, приложенная к каждому концу, Δl — удлинение всей системы, $k = F/\Delta l$ — эффективная жёсткость.

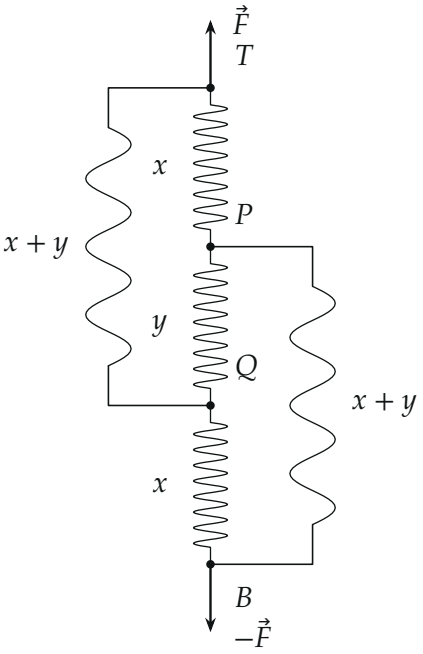

Рис. 2. Узлы и удлинения пружин; к концам приложены силы $\vec{F}$ и $-\vec{F}$.

1. Удлинения через два числа. При перевороте схемы пружина 1 переходит в 3, пружина 4 — в 5, пружина 2 — сама в себя, силы на концах тоже меняются местами. Положение равновесия единственное, значит, оно тоже симметрично: $x_1 = x_3 = x$. Обозначим $x_2 = y$. Пружина 4 соединяет T и Q, её удлинение — сумма удлинений пружин 1 и 2; пружина 5 соединяет P и B:

$$x_4 = x + y, \qquad x_5 = y + x.$$

2. Равновесие узла P**.** На узел P действуют: пружина 1 — вверх с силой k_1x, пружина 2 — вниз с силой k_1y, пружина 5 — вниз с силой $k_2(x+y)$ (растянутая пружина тянет узел к своему другому концу). Условие равновесия невесомого узла в проекции на вертикаль:

$$k_1x = k_1y + k_2(x+y) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\,x.$$

Равновесие узла Q даёт то же самое — это и есть симметрия.

3. Сила и удлинение системы. Сила F на верхнем конце T уравновешивает пружины 1 и 4, которые тянут узел T вниз (второй закон Ньютона для невесомого узла):

$$F = k_1x + k_2(x+y) = k_1x + \frac{2k_1k_2}{k_1+k_2}\,x = k_1\,\frac{k_1+3k_2}{k_1+k_2}\,x.$$

Удлинение системы — расстояние TB выросло на сумму удлинений пружин 1, 2, 3:

$$\Delta l = 2x + y = \frac{2(k_1+k_2) + (k_1-k_2)}{k_1+k_2}\,x = \frac{3k_1+k_2}{k_1+k_2}\,x.$$

Пункт 1.

$$k = \frac{F}{\Delta l} = k_1\,\frac{k_1+3k_2}{3k_1+k_2}.$$

Пункт 2. Систему растягивают, значит $x > 0$ (пружина 1 тянет узел T вниз вместе с пружиной 4, и обе растянуты). Знак y совпадает со знаком $k_1 - k_2$: при $k_2 > k_1$ получаем $y < 0$ — пружина 2 сжата. Смысл виден на рис. 3: при жёсткой пружине 5 она тянет узел P вниз сильнее, чем пружина 1 вверх, и пружина 2 должна подпирать узел снизу — а подпирать может только сжатая пружина.

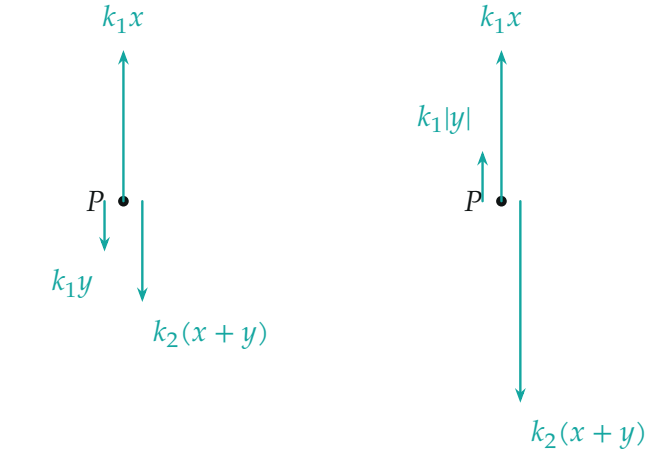

Рис. 3. Силы на узел P (длины в масштабе, k_1x одинаково): слева $k_2 = k_1/2$ — пружина 2 растянута и тянет вниз; справа $k_2 = 2k_1$ — пружина 2 сжата и толкает вверх.

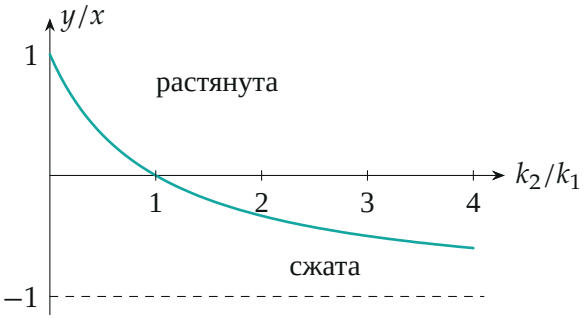

Рис. 4. Относительная деформация пружины 2: $y/x = \frac{1-k_2/k_1}{1+k_2/k_1}$, ноль при $k_2 = k_1$.

Обратите внимание. При $k_2 = k_1$ пружина 2 вообще не деформирована: узлы P и Q смещаются одинаково, и её можно убрать — останутся две параллельные ветви «k_1 и k_1 последовательно» с $k = k_1$, что совпадает с формулой.

Ответ.

$$k = k_1\,\frac{k_1 + 3k_2}{3k_1 + k_2}; \qquad \text{пружина 2 сжата при } k_2 > k_1.$$

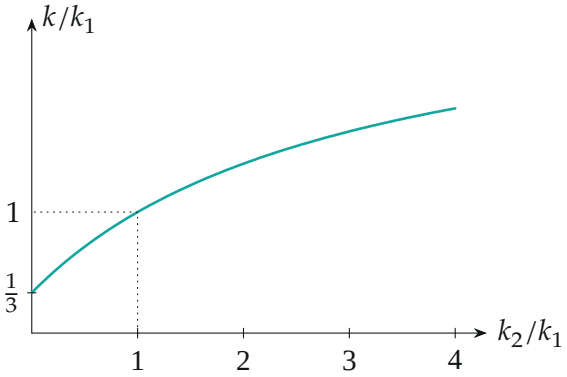

Рис. 5. Эффективная жёсткость k/k_1 от k_2/k_1: от $\frac{1}{3}$ при $k_2 \to 0$ до 3 при $k_2 \to \infty$.

Проверка. Пределы: $k_2 \to 0$ — остаются три пружины k_1 последовательно, $k = k_1/3$ — формула даёт $\frac{k_1}{3}$. $k_2 \to \infty$ — пружины 4 и 5 становятся жёсткими перемычками TQ и PB, тогда $y = -x$ и $\Delta l = x$: все три пружины k_1 деформированы на Δl (1 и 3 растянуты, 2 сжата) и работают параллельно, $k = 3k_1$ — формула даёт $\frac{k}{k_1} \to 3$. Размерность: $[k] = [k_1]$. Решение системы уравнений равновесия узлов P, Q, B без симметрии (проверено символьно) даёт тот же k и y/x.

Ответ. 1) $k = k_1\,\frac{k_1 + 3k_2}{3k_1 + k_2}$; 2) при $k_2 > k_1$.