«Серый ящик»

Задача 4. [ВсОШ 2020/21, региональный этап, 9 класс, задача 4] «„Серый ящик“».

В «сером» ящике собрана электрическая цепь, схема которой приведена на рисунке. К клеммам AB ящика подключают идеальный вольтметр, а к клеммам CD — различные резисторы, сопротивления которых в n раз больше, чем у резистора R_1. Зависимость показаний вольтметра U от n представлена в таблице.

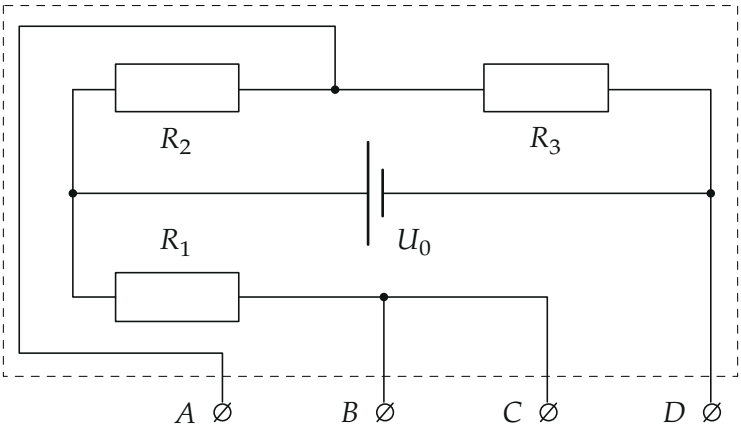

Рис. 1. Рисунок условия.

n	1	2	3	4	5	7	8
U, В	2,2	3,9	5,0	5,4	6,2	6,5	6,9

1. Выведите формулу теоретической зависимости $U(n)$.
2. Постройте график зависимости $U(n)$ по данным таблицы.
3. Определите напряжение U_0 источника и отношение $k = R_3/R_2$. Для этого можно либо осуществить линеаризацию зависимости $U(n)$, либо использовать две пары значений из таблицы и уравнение, полученное в пункте 1.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на закон Ома для участка цепи и обработку данных. Если распутать провода, внутри ящика два делителя напряжения, подключённые к одному источнику: R_2–R_3 и R_1–nR_1.

Идеальный вольтметр тока не берёт и показывает разность потенциалов средних точек делителей. Первый делитель от n не зависит, второй — зависит; подбором переменной зависимость превращается в прямую.

Обозначения. M — точка между R_2 и R_3 (к ней идёт клемма A), N — точка за R_1 (клеммы B и C), потенциал правого вывода источника (клемма D) примем за ноль, левого — U_0 (рис. 2). I_1, I_2 — токи в верхнем и нижнем делителях, $z = \frac{n}{1+n}$.

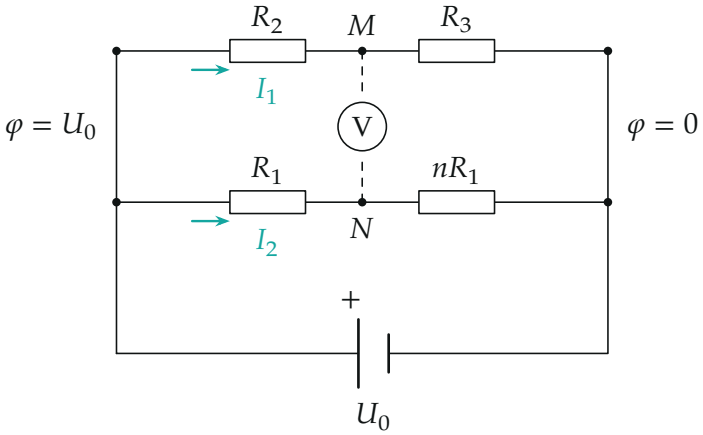

Рис. 2. Та же цепь, перерисованная: два делителя напряжения на одном источнике; вольтметр — между средними точками M и N.

Пункт 1.

1. Верхний делитель. Через вольтметр ток не идёт, поэтому R_2 и R_3 соединены последовательно. Закон Ома для участка цепи:

$$I_1 = \frac{U_0}{R_2 + R_3}, \qquad \varphi_M = I_1 R_3 = \frac{R_3}{R_2 + R_3} U_0 = \frac{k}{1+k} U_0.$$

2. Нижний делитель. Так же R_1 и nR_1 последовательно:

$$I_2 = \frac{U_0}{R_1 + nR_1}, \qquad \varphi_N = I_2 \cdot nR_1 = \frac{n}{1+n} U_0.$$

3. Показание вольтметра — модуль разности потенциалов точек M

и N; по данным U растёт с n, значит,

$$U = \varphi_N - \varphi_M = \frac{n}{1+n}\,U_0 - \frac{k}{1+k}\,U_0.$$

Пункт 2. График по таблице — на рис. 3. Точки ложатся на плавно растущую кривую с насыщением: при $n \to \infty$ $U \to U_0 - \frac{kU_0}{1+k} = \frac{U_0}{1+k}$.

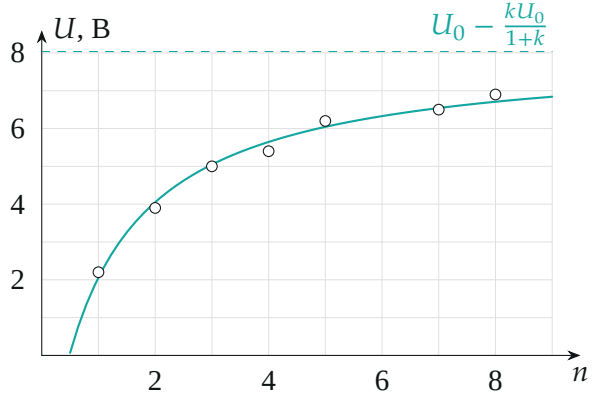

Рис. 3. Данные таблицы (кружки) и зависимость $U(n)$ с параметрами из п. 3 (бирюза); пунктир — предел при $n \to \infty$.

Пункт 3.

4. Линеаризация. В переменной $z = \frac{n}{1+n}$ формула п. 1 — прямая:

$$U = U_0\,z - \frac{k}{1+k}\,U_0.$$

Её наклон равен U_0, а пересечение с осью z ($U = 0$) — в точке $z_0 = \frac{k}{1+k}$. Вычислим z для каждого n:

n	1	2	3	4	5	7	8
z	0,500	0,667	0,750	0,800	0,833	0,875	0,889
U, В	2,2	3,9	5,0	5,4	6,2	6,5	6,9

Прямая, проведённая по всем точкам методом наименьших квадратов

(рис. 4):

$$U_0 = \frac{\Delta U}{\Delta z} \approx 12\text{ В}, \qquad z_0 = \frac{k}{1+k} \approx 0{,}33 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{z_0}{1-z_0} \approx 0{,}5.$$

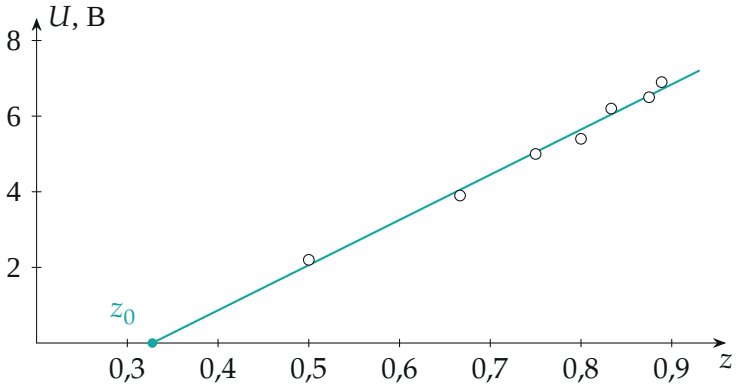

Рис. 4. Линеаризация: U от $z = \frac{n}{1+n}$; прямая пересекает ось z в $z_0 = \frac{k}{1+k}$, наклон — U_0.

5. По двум точкам. Возьмём $n = 2$ и $n = 5$:

$$3{,}9 = \frac{2}{3}U_0 - \frac{k}{1+k}U_0, \qquad 6{,}2 = \frac{5}{6}U_0 - \frac{k}{1+k}U_0.$$

Вычитаем: $\frac{1}{6}U_0 = 2{,}3$ В, $U_0 \approx 14$ В; тогда $\frac{k}{1+k}U_0 = \frac{2}{3}\cdot 13{,}8 - 3{,}9 = 5{,}3$ В, $\frac{k}{1+k} \approx 0{,}38$, $k \approx 0{,}6$. Две точки дают оценку грубее: разность z между ними всего 0,17, и ошибка 0,1 В в одном показании меняет U_0 на 0,6 В. Поэтому за ответ берём результат по всем точкам.

Обратите внимание. У организаторов способ «по двум точкам» с точками, снятыми с графика (3,85 и 6,20 В), дал $U_0 \approx 14$ В, $k \approx 0{,}7$, а линеаризация — 12 В и 0,5; расхождение — следствие разброса данных, надёжнее линеаризация.

Ответ. 1) $U = \left(\frac{n}{1+n} - \frac{k}{1+k}\right)U_0$. 2) График — рис. 3. 3) $U_0 \approx 12$ В, $k \approx 0{,}5$ (по двум точкам — $U_0 \approx 14$ В, $k \approx 0{,}6$).

Проверка. При $n = k$ (т. е. $nR_1/R_1 = R_3/R_2$) делители одинаковы и $U = 0$ — мост уравновешен; у нас это $n = 0{,}5$, $z = \frac{1}{3} = z_0$ — то же

место пересечения прямой с осью. Подстановка $U_0 = 12$ В, $k = 0{,}5$ в формулу даёт 2,0; 4,0; 5,0; 5,6; 6,0; 6,5; 6,7 В — с таблицей расхождение не больше 0,25 В.

Ответ. 1) $U = U_0\left(\dfrac{n}{1+n} - \dfrac{k}{1+k}\right)$; 2) см. рис. 3; 3) линеаризация $z = \dfrac{n}{1+n}$: $U_0 \approx 12$ В, $k \approx 0{,}5$ (оценка по двум точкам грубее: $U_0 \approx 14$ В, $k \approx 0{,}6$).