Испытания автомобилей

Задача 5. [ВсОШ 2020/21, региональный этап, 9 класс, задача 5] «Испытания автомобилей».

Автомобиль должен проехать с постоянным ускорением прямой участок длиной L от линии старта AB до линии CD и, после её пересечения, развернувшись по дуге окружности на 180°, пересечь эту линию в обратном направлении (см. рис.). Начальная скорость автомобиля равна нулю, а на закруглённом участке постоянна и равна скорости, достигнутой при разгоне по прямой. Ускорение автомобиля во время всего движения не должно превышать $a_{\max}$.

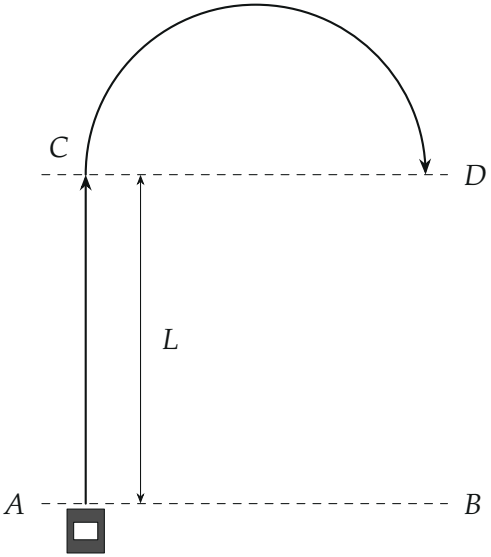

Рис. 1. Рисунок условия.

Во сколько раз время t_1 движения автомобиля от A до D при разгоне на участке AC с ускорением $a_{\max}$ превышает минимально возможное время t_2 движения от A до D?

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равноускоренное движение и движение по окружности с поиском минимума. Сильнее разгоняемся — быстрее проходим прямую, но приезжаем к повороту с большей скоростью u, а центростремительное ускорение u^2/R не может превышать

$a_{\max}$: радиус приходится брать больше, и разворот затягивается. Значит, разгон «на полную» не оптимален — есть наилучшее промежуточное ускорение.

Обозначения. a — ускорение на прямой ($a \le a_{\max}$), u — скорость в конце разгона и на дуге, R — радиус дуги, $y = a/a_{\max}$ — доля от предельного ускорения, $\tau = \sqrt{2L/a_{\max}}$ — время разгона с $a_{\max}$.

1. Разгон на прямой AC**.** Движение равноускоренное без начальной скорости, ускорение $\vec{a}$ направлено вдоль скорости (рис. 2). Кинематика:

$$L = \frac{at_{AC}^2}{2} \;\Rightarrow\; t_{AC} = \sqrt{\frac{2L}{a}}, \qquad u = at_{AC} = \sqrt{2La}.$$

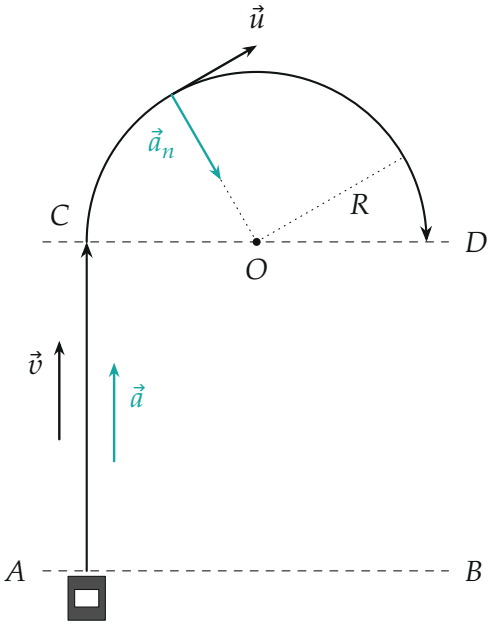

Рис. 2. На прямой ускорение $\vec{a}$ направлено вдоль скорости; на дуге скорость по модулю постоянна, ускорение $\vec{a}_n$ — к центру O.

2. Разворот. На дуге модуль скорости постоянен, поэтому ускорение

только центростремительное, направлено к центру O:

$$a_n = \frac{u^2}{R} \le a_{\max} \quad \Rightarrow \quad R \ge \frac{u^2}{a_{\max}} = \frac{2La}{a_{\max}}.$$

Время на дуге $t_{CD} = \frac{\pi R}{u}$ растёт с R, поэтому радиус берём наименьший, $R = \frac{u^2}{a_{\max}}$:

$$t_{CD} = \frac{\pi u}{a_{\max}} = \frac{\pi\sqrt{2La}}{a_{\max}}.$$

3. Полное время. Вынесем $\tau = \sqrt{2L/a_{\max}}$:

$$t(y) = t_{AC} + t_{CD} = \sqrt{\frac{2L}{a_{\max}}}\left(\frac{1}{\sqrt{y}} + \pi\sqrt{y}\right), \qquad 0 < y \le 1.$$

Первое слагаемое (разгон) убывает с y, второе (разворот) растёт (рис. 3).

4. Время t_1 — разгон с $a_{\max}$. При $y = 1$:

$$t_1 = (1+\pi)\sqrt{\frac{2L}{a_{\max}}}.$$

5. Минимум t_2. Обозначим $s = \sqrt{y}$. Сумма $\frac{1}{s} + \pi s$ — сумма двух положительных чисел с постоянным произведением π; по неравенству о среднем арифметическом и геометрическом

$$\frac{1}{s} + \pi s \ge 2\sqrt{\frac{1}{s}\cdot \pi s} = 2\sqrt{\pi},$$

причём равенство — при $\frac{1}{s} = \pi s$, т. е. $y = s^2 = \frac{1}{\pi} < 1$ — такое ускорение допустимо. Значит,

$$t_2 = 2\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{2L}{a_{\max}}}, \qquad a_{\text{опт}} = \frac{a_{\max}}{\pi}, \qquad R_{\text{опт}} = \frac{2L}{\pi}.$$

В оптимуме время разгона $\sqrt{\pi}\,\tau$ равно времени разворота $\pi \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\tau$.

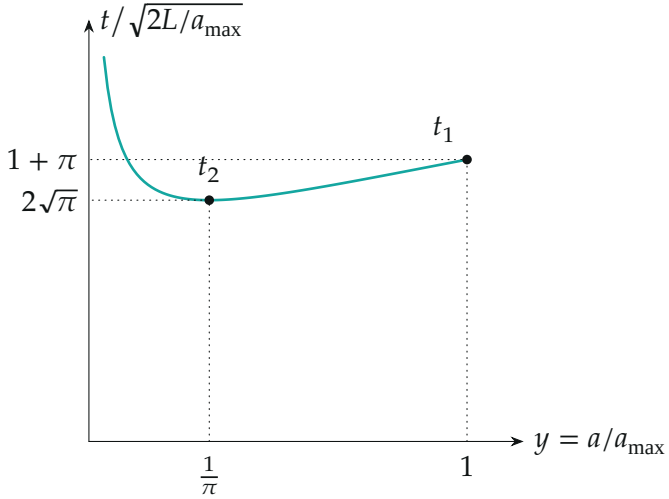

Рис. 3. Время от A до D (в единицах $\sqrt{2L/a_{\max}}$) от доли $y = a/a_{\max}$: минимум $2\sqrt{\pi}$ при $y = 1/\pi$, при $y = 1 - 1 + \pi$.

6. Отношение.

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{1+\pi}{2\sqrt{\pi}} = \frac{4{,}142}{3{,}545} \approx 1{,}17.$$

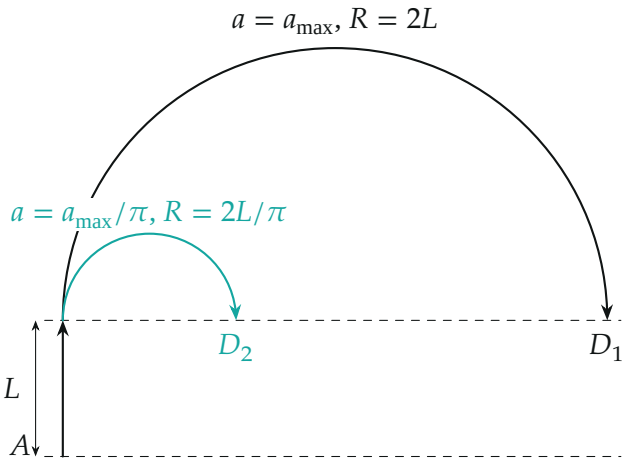

Рис. 4. Траектории в масштабе: при $a = a_{\max}$ радиус разворота $2L$ (чёрная), при оптимальном $a = a_{\max}/\pi$ — $2L/\pi$ (бирюза).

Обратите внимание. Ускорение ограничено на всём пути, и на дуге оно — центростремительное, хотя скорость по модулю не меняется. Если про это забыть, получится «разгоняйся с $a_{\max}$ и поворачивай как угодно круто».

Ответ.

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{1+\pi}{2\sqrt{\pi}} \approx 1{,}17.$$

Проверка. Размерность: $\sqrt{L/a}$ — $\sqrt{\text{м}/(\text{м}/\text{с}^2)}$ = с. Отношение больше единицы — как и должно быть для минимума. Численная проверка: $f(y) = \frac{1}{\sqrt{y}} + \pi\sqrt{y}$ на сетке по $y \in (0;1]$ даёт минимум 3,545 при $y = 0{,}318 \approx 1/\pi$, $f(1) = 4{,}142$. Смысл: умеренный разгон выигрывает лишь 17 % — функция у минимума пологая.

Ответ. $\frac{t_1}{t_2} = \frac{1+\pi}{2\sqrt{\pi}} \approx 1{,}17$ (минимум времени — при разгоне с ускорением $a_{\max}/\pi$).