Трёхлитровый сосуд

Задача 6. [ВсОШ 2020/21, региональный этап, 9 класс, задача 6] «Трёхлитровый сосуд».

Тонкостенный сосуд (в форме уголка) без дна, изображённый на рисунке, установлен на гладкой горизонтальной поверхности. В него через небольшое отверстие в правой верхней грани наливают воду. Когда $5/6$ объёма сосуда оказывается заполненным, вода начинает вытекать из-под него. Определите массу сосуда, если известно, что $a = 10$ см, а плотность воды $\rho = 1{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3.

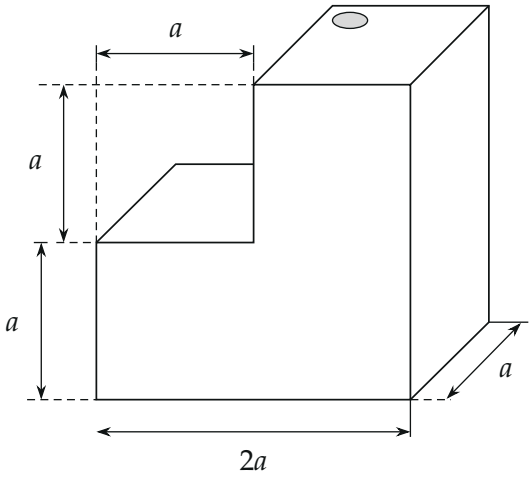

Рис. 1. Рисунок условия.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на гидростатическое давление и правило моментов. Дна у сосуда нет, и вода давит на стол, а на сам сосуд — изнутри на стенки. Вертикально вверх вода давит только на горизонтальную «полку» над левой нижней частью: эта сила приподнимает левый край. Когда её момент относительно правого нижнего ребра O сравняется с моментом силы тяжести сосуда, левый край перестанет давить на стол — вода начнёт вытекать.

Обозначения. Вид спереди (рис. 2): x — расстояние от левой стенки, y — высота над столом. Объём сосуда $V = 2a \cdot a \cdot a + a \cdot a \cdot a = 3a^3$ (три литра при $a = 10$ см). H — уровень воды, F — сила давления воды на полку, M — масса сосуда, O — правое нижнее ребро.

1. Уровень воды. Налито $\frac{5}{6} \cdot 3a^3 = 2{,}5a^3$. Нижняя часть ($2a \times a \times a$) вмещает $2a^3$, остальные $0{,}5a^3$ — в правой колонне сечением $a \times a$, т. е. вода поднялась в ней на $a/2$:

$$H = a + \frac{a}{2} = \frac{3}{2}a.$$

2. Сила давления на полку. Полка — горизонтальная грань $a \times a$ на высоте a, под ней вода. Давление в воде на глубине $H - a$ под свободной поверхностью (рис. 4):

$$p = \rho g\,(H - a) = \rho g\,\frac{a}{2}, \qquad F = p \cdot a^2 = \frac{1}{2}\,\rho g a^3.$$

Сила направлена вверх и приложена в центре полки, при $x = a/2$ — давление по полке одинаково.

3. Остальные стенки. Силы давления на вертикальные стенки горизонтальны. Их сумма равна нулю: влево давят левая стенка ($\rho g a^3$) и ступенька ($\frac{1}{8}\rho g a^3$), вправо — правая стенка ($\frac{9}{8}\rho g a^3$). Суммарный момент этих сил относительно O тоже равен нулю: $\frac{5}{12} + \frac{7}{48} = \frac{9}{16}$ слева и $\frac{9}{16}$ справа (в единицах $\rho g a^4$). Опрокидывает только $\vec{F}$.

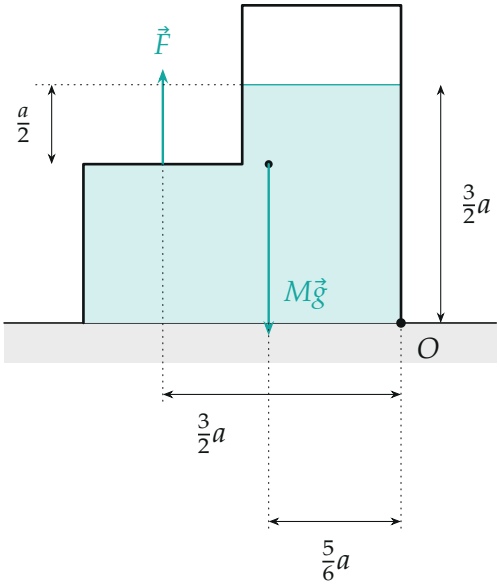

Рис. 2. Вид спереди: вода до уровня $\frac{3}{2}a$; сила $\vec{F}$ давления воды на полку и сила тяжести $M\vec{g}$ в центре масс сосуда; O — ось поворота.

4. Центр масс сосуда. Стенки тонкие и однородные, масса пропорциональна площади. Разобьём их на квадраты $a \times a$: перед и зад — по 3, левая стенка — 1, полка — 1, ступенька — 1, верх — 1, правая стенка — 2; дна нет. Всего 12 квадратов массы $m = M/12$ каждый (рис. 3). Плечи их сил тяжести относительно O — расстояния $2a - x$ от центров до вертикали через O:

$$\sum_i mg\,(2a - x_i) = mga\left[2\left(\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\right) + 2 + \tfrac{3}{2} + 1 + \tfrac{1}{2} + 0 + 0\right]$$

$$= 10\,mga = \frac{10}{12}\,Mga.$$

Значит, центр масс — на расстоянии $\frac{5}{6}a$ от O по горизонтали.



Рис. 3. Двенадцать квадратов $a \times a$, из которых состоит сосуд; в каждом — плечо его силы тяжести относительно O в единицах a.

5. Правило моментов. В момент начала подтекания реакция стола на левые стенки равна нулю, и сосуд опирается только на ребро O. Правило моментов относительно O: F поворачивает сосуд против часовой стрелки с плечом $2a - \frac{a}{2} = \frac{3}{2}a$, сила тяжести — по часовой с плечом $\frac{5}{6}a$:

$$F \cdot \frac{3}{2}a = Mg \cdot \frac{5}{6}a \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\rho g a^3 \cdot \frac{3}{2}a = \frac{5}{6}Mga \quad \Rightarrow \quad M = \frac{9}{10}\rho a^3.$$

Числа: $M = 0{,}9 \cdot 1000 \cdot 0{,}1^3 = 0{,}9$ кг.

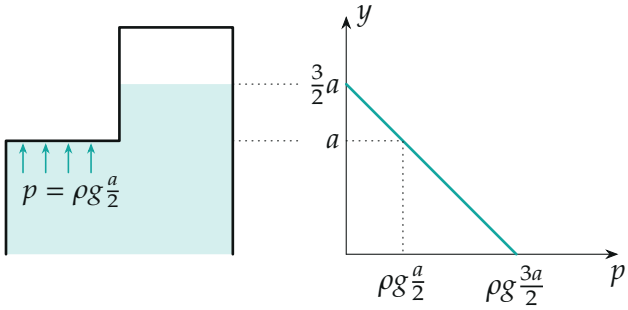

Рис. 4. Давление воды растёт линейно с глубиной; под полкой (на высоте a) оно равно $\rho g\frac{a}{2}$ и одинаково по всей полке.

6. Второй способ — система «сосуд + вода». Внешние силы: тяжесть сосуда $M\vec{g}$, тяжесть воды $m\vec{g}$ ($m = 2{,}5\rho a^3$, центр масс при $x = \frac{2a\cdot a + 0{,}5a\cdot\frac{3}{2}a}{2{,}5a} = 1{,}1a$), сила давления стола на воду снизу $P = \rho g \cdot \frac{3}{2}a \cdot 2a \cdot a = 3\rho g a^3$ при $x = a$ (рис. 5) и реакция в O. Моменты

относительно O:

$$P \cdot a - mg \cdot 0{,}9a = 3\rho g a^4 - 2{,}25\rho g a^4 = 0{,}75\rho g a^4 = Mg \cdot \frac{5}{6}\, a,$$

то же $M = 0{,}9\rho a^3$.

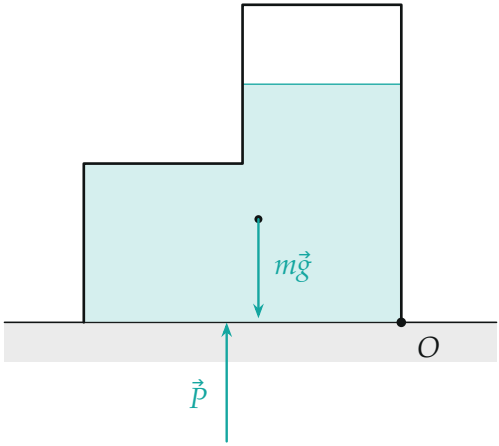

Рис. 5. Второй способ: на систему «сосуд + вода» стол давит снизу на воду с силой $\vec{P}$ (больше веса воды $m\vec{g}$ — разность и поднимает сосуд).

Обратите внимание. Вода давит на стол с силой $3\rho g a^3$, хотя весит $2{,}5\rho g a^3$: лишние $0{,}5\rho g a^3$ — это реакция полки, которая давит на воду вниз. Именно этой силой вода и приподнимает сосуд.

Ответ.

$$M = \frac{9}{10}\,\rho a^3 = 0{,}9 \text{ кг}.$$

Проверка. Размерность: $[\rho a^3] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot \text{м}^3 = \text{кг}$. Сосуд не отрывается целиком: поднимающая сила $F = 0{,}5$ кг$\cdot g$ меньше веса 0,9 кг$\cdot g$, — поэтому он поворачивается вокруг O, а не всплывает. Два способа (п. 5 и п. 6) дали одно и то же.

Ответ. $M = 0{,}9\,\rho a^3 = 0{,}9$ кг.