# Девять резисторов

**Задача 7.** [ВсОШ 2020/21, региональный этап, 9 класс, задача 7] «Девять резисторов».

Электрическая цепь состоит из девяти одинаковых резисторов и трёх идеальных амперметров ($A_0$, $A_1$, $A_2$). Через амперметр $A_0$ протекает ток силой $I_0 = 9$ мА. Определите показания амперметров $A_1$ и $A_2$.

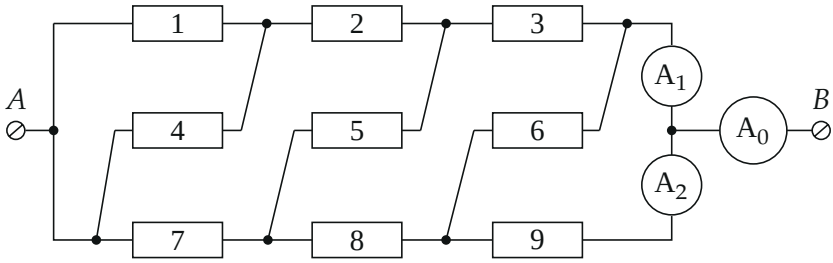


*Рис. 1. Рисунок условия.*

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на расчёт цепи постоянного тока: законы Ома и правила узлов. Схема выглядит запутанной из-за косых проводов, но если аккуратно проследить, куда идёт каждый конец среднего ряда резисторов, она сводится к мосту из четырёх плеч и перемычки. Идеальные амперметры имеют нулевое сопротивление — их концы при расчёте токов можно считать одной точкой $O$, а показания — это токи, текущие через них.

**Обозначения.** $R$ — сопротивление каждого резистора, $I_k$ — ток через резистор $k$. Узлы (рис. 2): $A$ — левая клемма (к ней подключены и верхний, и нижний ряды), $N_1, N_2, N_3$ — узлы верхнего ряда, $M_1, M_2$ — нижнего, $O$ — точка соединения амперметров.

**1. Куда подключены резисторы среднего ряда.** Следим за косыми проводами: левый конец резистора 4 идёт вниз к нижнему проводу у клеммы $A$, правый — вверх в $N_1$; значит, $R_4$ подключён между $A$ и $N_1$ — параллельно $R_1$. Так же $R_5$ — между $M_1$ и $N_2$, $R_6$ — между $M_2$ и $N_3$. Амперметр $A_1$ соединяет $N_3$ с $O$, поэтому $N_3$ и $O$ — одна точка: $R_6$ подключён между $M_2$ и $O$ — параллельно $R_9$.

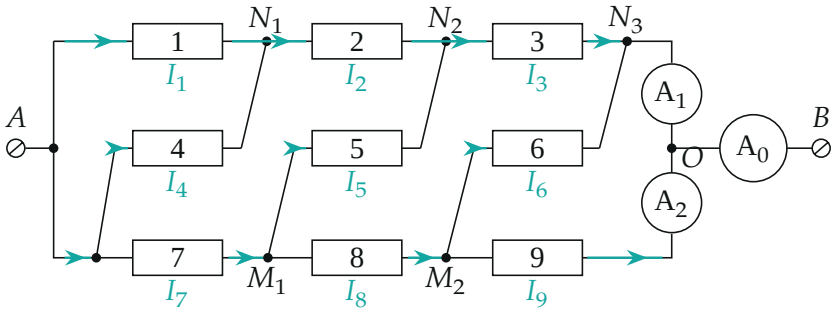


*Рис. 2. Узлы и токи: бирюзовые стрелки — выбранные направления токов, $I_k$ — ток через резистор $k$.*

**2. Упрощение.** Параллельные одинаковые резисторы $R_1 \parallel R_4$ дают $R/2$, последовательно с $R_2$ — $\frac{3}{2}R$ между $A$ и $N_2$. Так же $R_6 \parallel R_9$ даёт $R/2$, последовательно с $R_8$ — $\frac{3}{2}R$ между $M_1$ и $O$. Остаются: $R_7$ между $A$ и $M_1$, $R_3$ между $N_2$ и $O$ и перемычка $R_5$ между $M_1$ и $N_2$ — мост (рис. 3). Он не уравновешен: $\frac{1{,}5R}{R} \neq \frac{R}{1{,}5R}$, ток через $R_5$ есть.

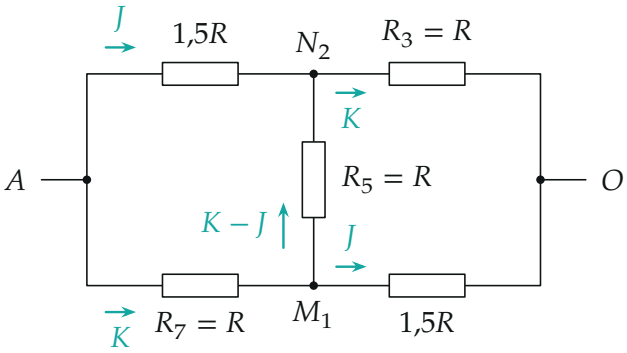


*Рис. 3. Эквивалентный мост: плечи $\frac{3}{2}R$ и $R$ стоят «накрест», через перемычку $R_5$ течёт ток $K - J$.*

**3. Симметрия моста.** Если повернуть мост на 180° (поменять местами $A$ и $O$, $N_2$ и $M_1$), плечо $\frac{3}{2}R$ сверху слева переходит в плечо $\frac{3}{2}R$ снизу справа, $R_7$ — в $R_3$. Ток через мост при этом течёт так же, поэтому токи в соответствующих плечах равны: через оба плеча $\frac{3}{2}R$ течёт ток $J$, через $R_7$ и $R_3$ — ток $K$.

**4. Уравнения.** Первое правило Кирхгофа для узла $N_2$: втекают $J$ и ток перемычки $I_5$ (от $M_1$), вытекает $K$:

$$J + I_5 = K \quad \Rightarrow \quad I_5 = K - J.$$

Закон Ома для перемычки: напряжение на ней — разность потенциалов $M_1$ и $N_2$; от точки $A$ до них $\varphi_A - \varphi_{M_1} = KR$, $\varphi_A - \varphi_{N_2} = \frac{3}{2}RJ$:

$$I_5 = \frac{\varphi_{M_1} - \varphi_{N_2}}{R} = \frac{3}{2}J - K.$$

Приравниваем: $K - J = \frac{3}{2}J - K$, $K = \frac{5}{4}J$. Весь ток $I_0 = J + K = \frac{9}{4}J$:

$$J = \frac{4}{9}I_0 = 4\text{ мА}, \qquad K = \frac{5}{9}I_0 = 5\text{ мА}, \qquad I_5 = 1\text{ мА}.$$

**5. Показания амперметров.** Ток $J = I_8 = 4$ мА в нижнем ряду делится поровну между одинаковыми параллельными $R_6$ и $R_9$: $I_6 = I_9 = 2$ мА. Через $A_2$ идёт только ток $R_9$:

$$I_{A_2} = \frac{J}{2} = \frac{2}{9}I_0 = 2\text{ мА}.$$

Через $A_1$ идут токи $R_3$ и $R_6$ (оба приходят в $N_3$):

$$I_{A_1} = K + \frac{J}{2} = \frac{7}{9}I_0 = 5 + 2 = 7\text{ мА}.$$

Все токи — на рис. 4.

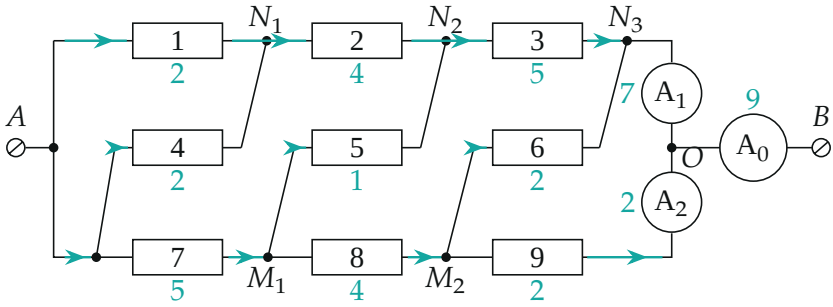

*Рис. 4. Токи в миллиамперах (бирюза), направления — как на рис. 2.*

**Обратите внимание.** Ошибка, которую легко сделать, — решить, что $R_6$ подключён к верхнему ряду «как $R_3$». Его правый конец через амперметр $A_1$ попадает в точку $O$, то есть $R_6$ — параллельно $R_9$, и половина тока $R_8$ идёт через $A_1$, а не через $A_2$.

**Ответ.**

$$I_{A_1} = \frac{7}{9} I_0 = 7 \text{ мА}, \qquad I_{A_2} = \frac{2}{9} I_0 = 2 \text{ мА}.$$

**Проверка.** Сумма $7+2 = 9$ мА $= I_0$. Узел $A$: $I_1 + I_4 + I_7 = 2+2+5 = 9$ мА. Узел $M_1$: втекает $I_7 = 5$, вытекают $I_5 + I_8 = 1 + 4$ — сходится. Напряжение $A \to O$ по верху: $2R + 4R + 5R = 11R$ (в мА·$R$), по низу: $5R + 4R + 2R = 11R$ — потенциалы согласованы. Независимый расчёт методом узловых потенциалов (python) даёт те же токи и сопротивление цепи $\frac{11}{9}R$.

**Ответ.** $I_{A_1} = 7$ мА, $I_{A_2} = 2$ мА.