Ползущая полоска

Задача 1. [ВсОШ 2020/21, заключительный этап, 10 класс, задача 1] «Ползущая полоска».

При использовании специальной технологии обработки полимерных материалов можно добиться анизотропии свойств их поверхности. Например, движение полоски из полиэтилена по горизонтальной поверхности стола в направлении AB (на рис. 1 вправо) характеризуется коэффициентом трения μ_1, а движение в направлении BA — коэффициентом трения $\mu_2 < \mu_1$. Если подвергнуть лежащую на столе полоску длины l циклическому нагреванию-охлаждению, то можно заметить, что полоска перемещается по поверхности стола.

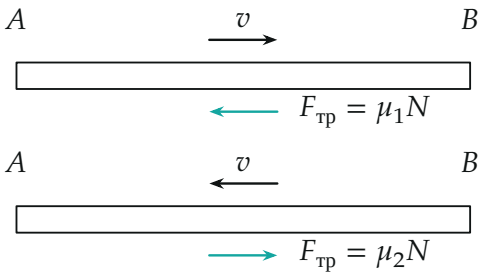

Рис. 1

1. В каком направлении (AB или BA) сместится полоска при большом количестве циклов?
2. На какое расстояние переместится полоска за N циклов нагревания-охлаждения, если разность максимальной и минимальной температур в цикле равна ΔT? Ответ запишите в виде формулы.
3. Вычислите, на какое расстояние переместится полоска длины $l = 20$ см за $N = 100$ циклов нагрева-охлаждения при изменении ее температуры на $\Delta T = 80\,^\circ\text{C}$. Значения коэффициентов трения $\mu_1 = 0{,}15$, $\mu_2 = 0{,}05$.

Считайте, что при изменении температуры полиэтилена на ΔT его длина изменяется на величину $\Delta l = \alpha l \Delta T$, где l — длина полоски при комнатной температуре, $\alpha = 2 \cdot 10^{-4}\,^\circ\text{C}^{-1}$ — коэффициент температурного

расширения полиэтилена. Полоска имеет постоянную толщину, не изгибается и прижимается к столу равномерно всей поверхностью. Нагревание и охлаждение происходят медленно.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача класса «распределённая сила трения и равновесие». При нагреве полоска удлиняется, и её участки скользят по столу в разные стороны от некоторой неподвижной точки O. Нагрев медленный, полоска движется без ускорения, поэтому сумма сил трения на неё равна нулю. Участки, ползущие вправо, тормозятся сильнее (μ_1), чем ползущие влево (μ_2), — значит, неподвижная точка сдвинута к правому краю, и при нагреве полоска в основном удлиняется влево. При охлаждении всё наоборот: точка O уходит к левому краю, и полоска укорачивается в основном справа. В итоге за цикл полоска «шагает» влево, как гусеница.

Обозначения. m — масса полоски; ось x — вдоль AB (вправо); x_1, x_2 — расстояния от левого края A до неподвижной точки при нагреве и охлаждении; Δx — смещение полоски за цикл.

1. Сила трения на участок. Полоска прижата равномерно, на участок длины a приходится сила нормального давления $N_a = mg\,a/l$. Участок скользит, поэтому на него действует сила трения скольжения μN_a, направленная против его скорости; коэффициент μ_1, если участок едет вправо, μ_2 — если влево. Внутри полоски силы упругости разных участков друг на друга — внутренние, в сумму сил на всю полоску они не входят.

2. Нагрев. Слева от O участки едут влево (трение μ_2, вправо), справа — вправо (трение μ_1, влево), рис. 2. Второй закон Ньютона для всей полоски в проекции на ось x при нулевом ускорении:

$$\mu_2\, mg\,\frac{x_1}{l} - \mu_1\, mg\,\frac{l - x_1}{l} = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}\, l.$$

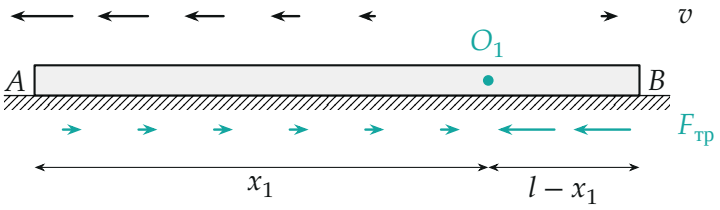

Рис. 2. Нагрев: скорости участков v (сверху) и силы трения на них со стороны стола (снизу), $\mu_1 = 3\mu_2$; суммы стрелок трения слева и справа от O равны.

Неподвижная точка O_1 находится на расстоянии x_1 от края A. Участок AO_1 при нагреве удлиняется на $\alpha x_1 \Delta T$, а его конец O_1 стоит, поэтому край A смещается *влево* на

$$s_1 = \alpha\, x_1\, \Delta T = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}\, l\alpha\Delta T.$$

3. Охлаждение. Теперь участки едут к неподвижной точке O_2: левые — вправо (трение μ_1, влево), правые — влево (трение μ_2, вправо), рис. 3:

$$-\mu_1\, mg\, \frac{x_2}{l} + \mu_2\, mg\, \frac{l - x_2}{l} = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}\, l.$$

Край A смещается *вправо* на $s_2 = \alpha x_2 \Delta T$.

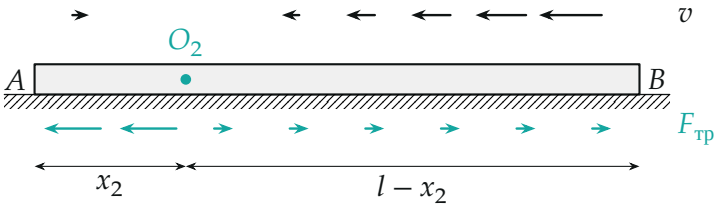

Рис. 3. Охлаждение: всё зеркально, неподвижная точка O_2 — ближе к краю A.

4. Смещение за цикл. После нагрева и охлаждения длина полоски та же, а край A сдвинулся влево на (рис. 4)

$$\Delta x = s_1 - s_2 = \frac{x_1 - x_2}{l}\, l\alpha\Delta T = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}\, l\alpha\Delta T > 0.$$

Так сдвигается и вся полоска. Здесь пренебрегли тем, что длина при нагреве отличается от l на малую долю $\alpha\Delta T = 0{,}016$ — это поправка второго порядка малости к Δx.

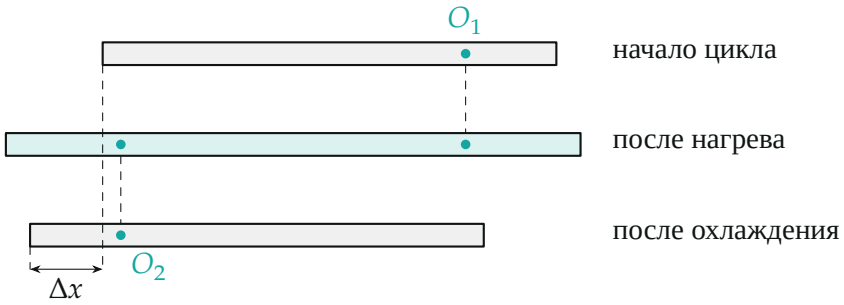

Рис. 4. Положения полоски за один цикл (удлинение сильно преувеличено). Бирюзовые точки — неподвижные точки при нагреве и охлаждении.

Пункт 1. $\Delta x > 0$ при $\mu_1 > \mu_2$: полоска ползёт в направлении BA — туда, где трение меньше.

Пункт 2. Циклы одинаковы, смещения складываются:

$$X = N\Delta x = N\,\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}\,l\,\alpha\,\Delta T.$$

Пункт 3.

$$X = 100 \cdot \frac{0{,}15 - 0{,}05}{0{,}15 + 0{,}05} \cdot 0{,}20\ \text{м} \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot 80 =$$

$$= 100 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}20 \cdot 0{,}016\ \text{м} = 0{,}16\ \text{м} = 16\ \text{см}.$$

Обратите внимание: точка O — не центр полоски. Её положение задаёт не геометрия, а равенство сил трения слева и справа; при $\mu_1 = \mu_2$ она была бы в середине и при нагреве, и при охлаждении, и полоска стояла бы на месте.

Проверка. Размерность: $l\alpha\Delta T$ — длина. Предел $\mu_2 = \mu_1$: $\Delta x = 0$, движения нет — как и должно быть при изотропном трении. Предел $\mu_2 \to 0$: $\Delta x = l\alpha\Delta T$ — влево свободно, вправо «заперто»: при нагреве неподвижен правый край B, при охлаждении — левый край A, и за цикл

полоска переступает на всё удлинение. Второй способ (через правый край B): при нагреве он уходит вправо на $\alpha(l - x_1)\Delta T$, при охлаждении — влево на $\alpha(l - x_2)\Delta T$, итог влево $\alpha(x_1 - x_2)\Delta T$ — то же.

Анизотропное трение превращает «дыхание» полоски от нагрева в направленное движение — по тому же принципу ползают черви и гусеницы.

Ответ. 1) в направлении BA (влево); 2) $X = N\dfrac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} l\alpha\Delta T$; 3) $X =$ 16 см.