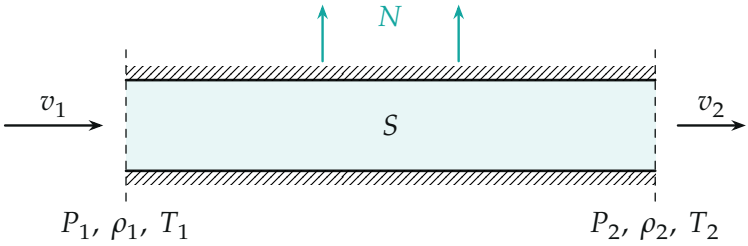
Газовая батарея

Задача 2. [ВсОШ 2020/21, заключительный этап, 10 класс, задача 2] «Газовая батарея».

На вход гладкой прямолинейной трубы постоянного сечения S, ось которой горизонтальна, поступает идеальный многоатомный газ, движущийся со скоростью v_1. Давление газа на входе в трубу равно P_1, плотность — ρ_1. Давление газа на выходе из трубы равно $P_2 = P_1 + \Delta P$. Определите:

1. плотность ρ_2 и скорость v_2 газа на выходе из трубы;
2. отношение температур газа T_2/T_1 на выходе и на входе в трубу соответственно;
3. тепловую мощность N, выделяемую трубой в окружающую среду.

Считайте, что в любом сечении трубы плотность и давление газа постоянны и не зависят от времени. Вязким трением можно пренебречь.



Поясняющий рисунок: газ входит слева, выходит справа; бирюзовые стрелки — теплота, которую труба отдаёт наружу.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача класса «стационарный поток: законы сохранения для открытой системы». Течение не меняется со временем, поэтому удобно следить за порцией газа, которая за малое время dt «проходит» через трубу: газ внутри трубы за это время не меняется, а на входе добавляется слой Sv_1dt, на выходе уходит слой Sv_2dt. К этой порции применяем по очереди три закона: сохранения массы, изменения импульса (второй закон Ньютона) и сохранения энергии (первое начало термодинамики). Давление на выходе больше, поэтому разность давлений тормозит газ: $v_2 < v_1$.

Обозначения. $\mu = \rho_1 S v_1$ — массовый расход (масса газа, проходящая сечение за единицу времени); M — молярная масса; ось x — вдоль потока.

Пункт 1.

1. Сохранение массы. Масса газа в трубе не меняется, сколько вошло за dt, столько и вышло:

$$\rho_1 S v_1\, dt = \rho_2 S v_2\, dt \;\Rightarrow\; \rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 = \mu/S.$$

2. Изменение импульса. Выделим газ между входным и выходным сечениями (рис. 1). Внешние силы вдоль оси x — только силы давления газа снаружи этих сечений: $P_1 S$ вперёд и $P_2 S$ назад; стенки гладкие и перпендикулярны оси, вдоль x они не давят. За dt выделенный газ сдвигается: справа за выходным сечением появляется слой массы $\mu\, dt$ со скоростью v_2, слева у входа исчезает такой же по массе слой со скоростью v_1, а середина не изменилась. Поэтому

$$dp_x = \mu\, dt\, v_2 - \mu\, dt\, v_1.$$

Второй закон Ньютона $dp_x = (P_1 - P_2) S\, dt$ даёт

$$\mu(v_2 - v_1) = -\Delta P\, S \;\Rightarrow\; v_2 = v_1 - \frac{\Delta P\, S}{\rho_1 S v_1} = v_1 - \frac{\Delta P}{\rho_1 v_1}.$$



Рис. 1. Газ между сплошными сечениями в момент t за время dt сдвигается до пунктирных. Изменение — уход слоя $v_1 dt$ слева и появление слоя $v_2 dt$ справа (бирюзовые слои, массы обоих равны $\mu\, dt$).

3. Плотность на выходе. Из пункта 1 шага 1:

$$\rho_2 = \frac{\rho_1 v_1}{v_2} = \frac{\rho_1 v_1}{v_1 - \dfrac{\Delta P}{\rho_1 v_1}} = \frac{\rho_1^2 v_1^2}{\rho_1 v_1^2 - \Delta P}.$$

Решение имеет смысл при $\Delta P < \rho_1 v_1^2$, иначе газ не дошёл бы до выхода.

Пункт 2.

4. Температура. Уравнение Менделеева — Клапейрона в форме $P = \rho RT/M$ для газа на входе и на выходе:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2/\rho_2}{P_1/\rho_1} = \frac{P_2}{P_1}\cdot\frac{v_2}{v_1} = \left(1 + \frac{\Delta P}{P_1}\right)\left(1 - \frac{\Delta P}{\rho_1 v_1^2}\right),$$

где использовано $\rho_1/\rho_2 = v_2/v_1$.

Пункт 3.

5. Сохранение энергии. Для того же газа за время dt запишем первое начало термодинамики вместе с кинетической энергией: изменение полной энергии (внутренней и кинетической) равно работе внешних сил давления минус отданная теплота (рис. 2). Внутренняя энергия многоатомного газа ($i = 6$, $C_V = 3R$) в единице массы

$$u = \frac{3RT}{M} = \frac{3P}{\rho}.$$

Работа сил давления за dt: на входе $P_1 S \cdot v_1 dt$ (сила по направлению движения), на выходе $-P_2 S \cdot v_2 dt$. Учитывая $Sv\,dt = \mu\,dt/\rho$:

$$\mu\,dt\left[\left(\frac{3P_2}{\rho_2} + \frac{v_2^2}{2}\right) - \left(\frac{3P_1}{\rho_1} + \frac{v_1^2}{2}\right)\right] = \mu\,dt\left(\frac{P_1}{\rho_1} - \frac{P_2}{\rho_2}\right) - N\,dt.$$

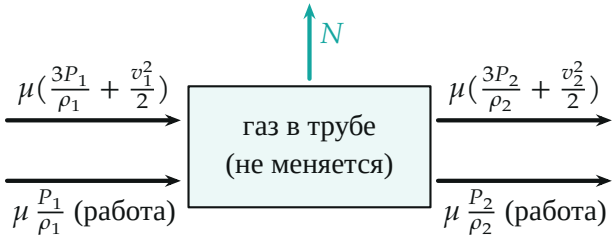


Рис. 2. Баланс энергии за единицу времени: слева входит энергия газа и работа, совершаемая над ним давлением сзади; справа уходит энергия газа и работа, которую газ совершает над газом впереди; вверх — теплота.

6. Тепловая мощность. Собираем всё в N:

$$N = \mu\left[\frac{v_1^2 - v_2^2}{2} + 4\Big(\frac{P_1}{\rho_1} - \frac{P_2}{\rho_2}\Big)\right].$$

Подставим $v_2 = v_1\big(1 - \frac{\Delta P}{\rho_1 v_1^2}\big)$ и $\frac{P_2}{\rho_2} = \frac{P_1}{\rho_1}\cdot\frac{T_2}{T_1}$:

$$N = \rho_1 S v_1\left[\frac{v_1^2}{2}\left(1 - \Big(1 - \frac{\Delta P}{\rho_1 v_1^2}\Big)^2\right) + \frac{4P_1}{\rho_1}\left(1 - \Big(1 + \frac{\Delta P}{P_1}\Big)\Big(1 - \frac{\Delta P}{\rho_1 v_1^2}\Big)\right)\right].$$

Множитель $4 = 3 + 1$: тройка — от внутренней энергии многоатомного газа, единица — от работы сил давления; вместе это C_P/R.

Обратите внимание: в балансе энергии нельзя забыть работу давления на входе и выходе. Без неё получился бы множитель 3 вместо 4 — типичная ошибка при переходе от закрытого сосуда к потоку.

Проверка. Размерность: P/ρ и v^2 — квадрат скорости, $\rho S v\cdot v^2$ — мощность. Предел $\Delta P \to 0$: $v_2 = v_1$, $T_2 = T_1$, $N = 0$ — труба ничего не делает. Знак: при малом ΔP

$$N \approx \frac{\mu\,\Delta P}{\rho_1}\left(\frac{4P_1}{\rho_1 v_1^2} - 3\right).$$

Для обычного (медленного по сравнению со звуком) газа $\rho_1 v_1^2 \ll P_1$, и $N > 0$: по пункту 2 при этом $T_2/T_1 \approx 1 - \Delta P/(\rho_1 v_1^2) < 1$ — газ на выходе холоднее, значит, он отдал теплоту трубе, а труба — окружающей

среде. Название «батарея» оправдано.

Труба без трения меняет состояние газа только за счёт теплообмена: три закона сохранения — массы, импульса, энергии — однозначно связывают вход и выход.

Ответ. 1) $\rho_2 = \dfrac{\rho_1^2 v_1^2}{\rho_1 v_1^2 - \Delta P}$, $v_2 = v_1 - \dfrac{\Delta P}{\rho_1 v_1}$;

2) $\dfrac{T_2}{T_1} = \left(1 + \dfrac{\Delta P}{P_1}\right)\left(1 - \dfrac{\Delta P}{\rho_1 v_1^2}\right)$;

3) $N = \rho_1 S v_1 \left[\dfrac{v_1^2}{2}\left(1 - \left(1 - \dfrac{\Delta P}{\rho_1 v_1^2}\right)^2\right) + \dfrac{4P_1}{\rho_1}\left(1 - \dfrac{T_2}{T_1}\right)\right]$.