Что измеряют омметром?

Задача 3. [ВсОШ 2020/21, заключительный этап, 10 класс, задача 3] «Что измеряют омметром?».

В соответствии с одной из моделей омметра он состоит из идеального источника постоянного напряжения $\mathcal{E}$ (с нулевым внутренним сопротивлением) и соединённых с ним последовательно резистора сопротивлением r и идеального амперметра (рис. 2). При подключении исследуемого резистора к клеммам A и B встроенный амперметр показывает силу тока, которая затем пересчитывается в величину измеряемого сопротивления и отображается на индикаторе омметра. Если подключить к выводам такого омметра диод, вольт-амперная характеристика которого приведена на рис. 3, то он покажет сопротивление $R_D = 6$ кОм.

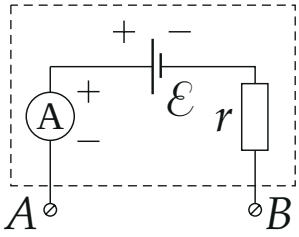


Рис. 2

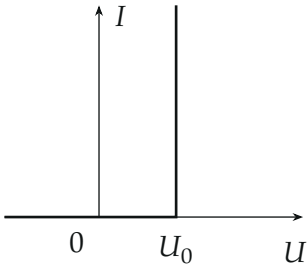


Рис. 3

Если к этому диоду добавить последовательно резистор сопротивлением $R = 20$ кОм и измерить сопротивление получившейся пары омметром, то он покажет $R_1 = 30$ кОм. Если вместо резистора и диода

подключить к омметру идеальную батарейку с напряжением $U_Б = 3$ В (полярность подключения неизвестна!), то он покажет отрицательное сопротивление $R_Б = -7{,}5$ кОм ($R_Б < 0$). По этим данным определите:

1. величину напряжения $\mathcal{E}$ внутреннего источника омметра;
2. величину внутреннего сопротивления r омметра;
3. напряжение U_0, при котором открывается диод;
4. показания $R_{Б1}$ омметра при подключении к нему той же батарейки, но с изменением полярности.

Примечание: амперметр, встроенный в омметр, измеряет силу тока с учётом его направления. Если ток течёт через амперметр в обратном направлении, то его величина определяется как отрицательная. Омметр выполняет все вычисления с учётом знаков.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача класса «закон Ома для полной цепи + нелинейный элемент». Омметр «думает», что к нему подключён резистор: по измеренному току I он находит сопротивление из закона Ома для замкнутой цепи. Если подключить не резистор, а диод или батарейку, прибор всё равно выдаст число — «кажущееся сопротивление». Мы запишем ток в цепи честно (с диодом, с батарейкой) и приравняем его току, который омметр приписал бы резистору с показанным сопротивлением. Три подключения — три уравнения на три неизвестные $\mathcal{E}$, r, U_0.

Обозначения. I — ток через амперметр (положителен, когда идёт так, как его гонит $\mathcal{E}$); $R_{изм}$ — показание омметра.

1. Как омметр пересчитывает ток. Для резистора X на клеммах закон Ома для замкнутой цепи (рис. 4): $I = \dfrac{\mathcal{E}}{r + X}$. Омметр решает его относительно X:

$$R_{изм} = \frac{\mathcal{E}}{I} - r \qquad \Longleftrightarrow \qquad I = \frac{\mathcal{E}}{r + R_{изм}}.$$

Показание отрицательно, когда ток больше тока короткого замыкания $\mathcal{E}/r$ — это случается, только если на клеммах есть источник, помогающий $\mathcal{E}$.

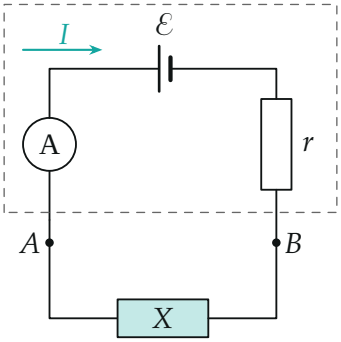


Рис. 4. Омметр (в пунктире) и подключённый к клеммам объект X: резистор, диод, диод с резистором или батарейка.

2. Диод. Омметр показал конечное R_D, значит, ток идёт, и диод включён в прямом направлении и открыт. Напряжение на открытом диоде равно U_0 при любом токе (рис. 3). Закон Ома для замкнутой цепи с диодом и пересчёт омметра:

$$I_D = \frac{\mathcal{E} - U_0}{r} = \frac{\mathcal{E}}{r + R_D}. \qquad (1)$$

3. Диод и резистор. Последовательно с открытым диодом стоит R:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E} - U_0}{r + R} = \frac{\mathcal{E}}{r + R_1}. \qquad (2)$$

Рабочие точки обоих подключений — на рис. 5: ток в цепи — пересечение ВАХ диода с прямой $I = (\mathcal{E} - U)/(r + R_{\text{внеш}})$.

4. Сопротивление r**.** Из (1) и (2) $\mathcal{E} - U_0 = \dfrac{\mathcal{E}r}{r + R_D} = \dfrac{\mathcal{E}(r + R)}{r + R_1}$, поэтому

$$r(r + R_1) = (r + R)(r + R_D) \;\Rightarrow\; r(R_1 - R_D - R) = RR_D,$$

$$r = \frac{RR_D}{R_1 - R_D - R} = \frac{20 \cdot 6}{30 - 6 - 20} = 30 \text{ кОм}.$$

Отсюда же

$$U_0 = \mathcal{E}\left(1 - \frac{r}{r + R_D}\right) = \mathcal{E}\,\frac{R_D}{r + R_D} = \frac{\mathcal{E}}{6}. \qquad (3)$$

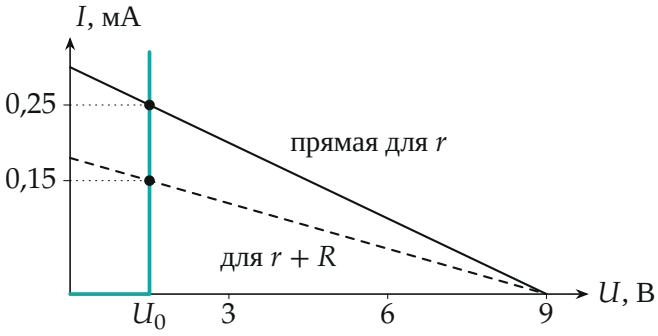


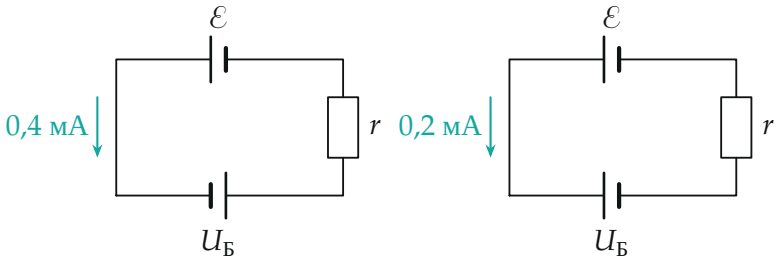
Рис. 5. ВАХ диода (бирюзовая) и прямые нагрузки $I = (\mathcal{E} - U)/r$ (сплошная) и $I = (\mathcal{E} - U)/(r + R)$ (пунктир) при найденных $\mathcal{E} = 9$ В, $r = 30$ кОм.

5. Батарейка: какая полярность. Показание $R_Б < 0$, по шагу 1 ток больше $\mathcal{E}/r$ — батарейка включена *согласно* с источником омметра, напряжения складываются (рис. 6, слева):

$$I_Б = \frac{\mathcal{E} + U_Б}{r} = \frac{\mathcal{E}}{r + R_Б}$$

$$\mathcal{E}\left(\frac{1}{r + R_Б} - \frac{1}{r}\right) = \frac{U_Б}{r} \;\Rightarrow\; \mathcal{E} = -U_Б\,\frac{r + R_Б}{R_Б}.$$

Подставляем: $\mathcal{E} = -3 \cdot \dfrac{30 - 7{,}5}{-7{,}5} = 9$ В. Проверим другую полярность: при встречном включении $\dfrac{\mathcal{E} - U_Б}{r} = \dfrac{\mathcal{E}}{r + R_Б}$ даёт $\mathcal{E} = U_Б\dfrac{r + R_Б}{R_Б} = -9$ В < 0 — невозможно. Значит, включение было согласным.



согласно: $R_Б = -7{,}5$ кОм встречно: $R_{Б1} = 15$ кОм

Рис. 6. Батарейка на клеммах омметра (амперметр не показан). Длинная черта — плюс. Слева ЭДС складываются, справа вычитаются.

6. Напряжение открытия диода. По (3): $U_0 = \mathcal{E}/6 = 1{,}5$ В.

7. Батарейка наоборот. Теперь включение встречное (рис. 6, справа), и ток меньше:

$$\frac{\mathcal{E} - U_Б}{r} = \frac{\mathcal{E}}{r + R_{Б1}}$$

$$R_{Б1} = \frac{r\,\mathcal{E}}{\mathcal{E} - U_Б} - r = r\,\frac{U_Б}{\mathcal{E} - U_Б} = 30 \cdot \frac{3}{9-3} = 15 \text{ кОм}.$$

Обратите внимание: «сопротивление» диода, которое показывает омметр, — не свойство диода. Это $R_D = rU_0/(\mathcal{E} - U_0)$, оно зависит от $\mathcal{E}$ и r прибора: другой омметр покажет у того же диода другое число.

Проверка. Размерность: $RR_D/(R_1 - R_D - R)$ — сопротивление. Подстановка всех найденных величин: диод — ток $(9 - 1{,}5)/30 = 0{,}25$ мА, показание $9/0{,}25 - 30 = 6$ кОм; диод с резистором — $7{,}5/50 = 0{,}15$ мА, показание $9/0{,}15 - 30 = 30$ кОм; батарейка согласно — $12/30 = 0{,}4$ мА, $9/0{,}4 - 30 = -7{,}5$ кОм. Все три данных условия воспроизведены.

Омметр честно измеряет только ток; сопротивлением он его называет по закону Ома для резистора, поэтому для диода и батарейки получаются «странные» числа — вплоть до отрицательных.

Ответ. 1) $\mathcal{E} = 9$ В; 2) $r = 30$ кОм; 3) $U_0 = 1{,}5$ В; 4) $R_{Б1} = 15$ кОм.