Частично заряженный цилиндр

Задача 4. [ВсОШ 2020/21, заключительный этап, 10 класс, задача 4] «Частично заряженный цилиндр».

Бесконечный тонкостенный диэлектрический цилиндр радиуса R разбили вдоль оси вращения на равные «четвертинки». Две противолежащие четвертинки зарядили равномерно с поверхностной плотностью заряда $\sigma > 0$, а другие две оставили незаряженными. Найдите векторы напряжённости электрического поля цилиндра в точках, близких к его центру и имеющих координаты $(x;0)$ и $(0;y)$. Считайте $x, y \ll R$. Координатные оси OX и OY направлены вдоль биссектрис прямых углов (рис. 4).

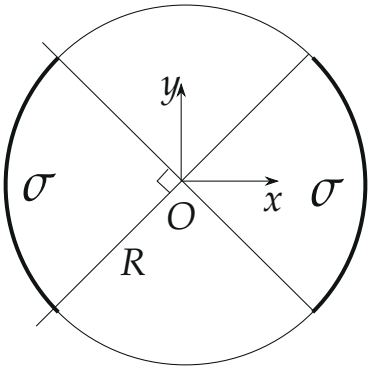

Рис. 4

▲ **Решение.** **Что происходит.** Задача класса «поле системы заряженных нитей, принцип суперпозиции». Цилиндр бесконечный, поэтому его можно нарезать на тонкие полоски вдоль оси — каждая полоска это заряженная нить. Главная идея: через точку наблюдения проведём узкий «клин»; он вырезает на цилиндре две полоски на противоположных концах хорды, и их поля в точке *в точности* гасят друг друга, если обе заряжены. Тогда поле создают только те клинья, у которых заряжен один конец хорды, — а такие есть лишь у границ четвертинок. Вторую точку сведём к первой суперпозицией.

Обозначения. P — точка наблюдения, $d\alpha$ — угол клина с вершиной в P, r_1, r_2 — расстояния от P до концов хорды, dL_1, dL_2 — ширина вырезанных полосок, β — угол между хордой и радиусом в её конце.

1. Поле одной полоски. Полоска шириной dL — нить с линейной плотностью заряда $\lambda = \sigma\, dL$. Поле нити на расстоянии r (теорема Гаусса для коаксиального цилиндра вокруг нити) направлено от нити по перпендикуляру к ней и равно

$$dE = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\sigma\, dL}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

2. Клин через точку P: две полоски гасят друг друга. Проведём через P хорду L_1L_2 и узкий клин угла $d\alpha$ вокруг неё (рис. 5). Клин вырезает дугу dL_1 на расстоянии r_1: её проекция на перпендикуляр к хорде равна $r_1\, d\alpha$, а сама дуга наклонена к этому перпендикуляру на угол β (угол между хордой и радиусом OL_1), поэтому $dL_1 = r_1\, d\alpha/\cos\beta$. Треугольник OL_1L_2 равнобедренный ($OL_1 = OL_2 = R$), значит, угол β на обоих концах одинаков и $dL_2 = r_2\, d\alpha/\cos\beta$. Поля полосок по шагу 1:

$$dE_1 = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{r_1\, d\alpha}{r_1\cos\beta} = \frac{\sigma\, d\alpha}{2\pi\varepsilon_0\cos\beta}, \qquad dE_2 = \frac{\sigma\, d\alpha}{2\pi\varepsilon_0\cos\beta} = dE_1.$$

Обе направлены вдоль хорды, но навстречу друг другу (каждая — от своей полоски). Если оба конца хорды заряжены, поля клина гасятся; если заряжен один конец, остаётся

$$dE = \frac{\sigma\, d\alpha}{2\pi\varepsilon_0\cos\beta} \approx \frac{\sigma\, d\alpha}{2\pi\varepsilon_0} \qquad (\beta \approx 0 \text{ при } P \text{ близко к } O),$$

направленное по хорде от заряженного конца. Это же доказывает, что внутри полностью заряженного цилиндра поле равно нулю в любой точке.

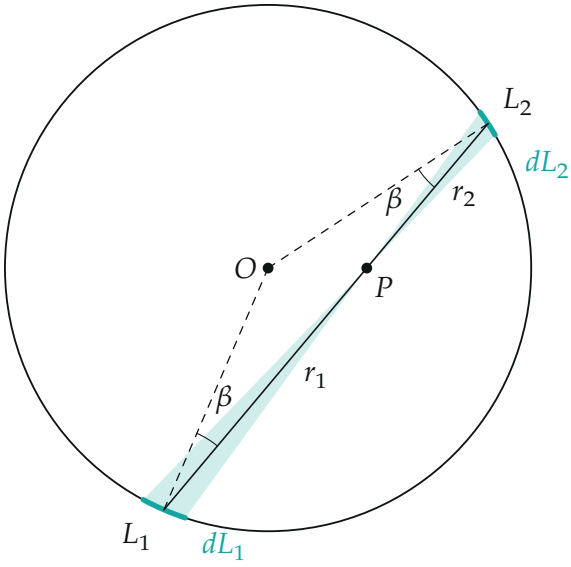

Рис. 5. Узкий клин с вершиной в P (угол $d\alpha$, закрашен) вырезает на цилиндре полоски dL_1 и dL_2. Треугольник OL_1L_2 равнобедренный, углы β равны.

3. Точка $(x;0)$: какие клинья не скомпенсированы. Возьмём $P = (x;0)$, $x > 0$. Заряжены дуги от $-45°$ до $45°$ (справа) и от $135°$ до $225°$ (слева). Повернём хорду вокруг P: пока оба её конца на заряженных дугах или оба на незаряженных, вклад нулевой (шаг 2). Нескомпенсированы хорды, у которых один конец уже перешёл границу, а другой ещё нет. Граница проходит у точки $45°$: хорда через P и граничную точку $B(45°)$ и хорда через P и противоположную граничную точку $B'(225°)$ не совпадают, потому что P смещена от центра (рис. 6). Между ними — клин, у которого правый конец на заряженной дуге, а левый — на незаряженной. Точно такой же клин есть у границы $-45°$.

Угол клина. Хорда BB' через центр и параллельная ей хорда через P разнесены на расстояние $x\sin 45° = x/\sqrt{2}$ (проекция OP на перпендикуляр к диагонали). Хорда через P и B повёрнута относительно хорды через P параллельно BB' на угол $\dfrac{x/\sqrt{2}}{R}$ (смещение конца на расстоянии $\approx R$ от P); хорда через P и B' — на такой же угол в другую сторону. Угол

клина

$$d\alpha = \frac{2x}{\sqrt{2}\,R} = \frac{\sqrt{2}\,x}{R}.$$

Нескомпенсированные полоски лежат обе на правой дуге, у её концов $45°$ и $-45°$. По шагу 2 каждая даёт поле

$$E_0 = \frac{\sigma\, d\alpha}{2\pi\varepsilon_0} = \frac{\sqrt{2}\,\sigma x}{2\pi\varepsilon_0 R},$$

направленное по своей хорде от полоски: $\vec{E}_1$ — вдоль диагонали к точке $225°$, $\vec{E}_2$ — к точке $135°$ (рис. 7).

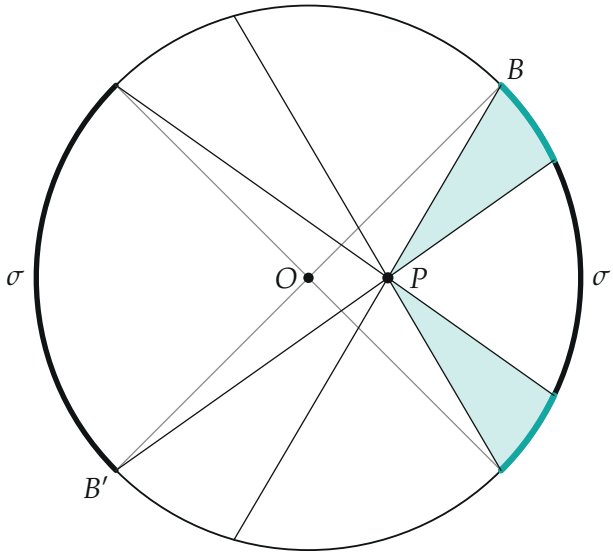

Рис. 6. Точка $P = (x; 0)$ (смещение x увеличено для наглядности). Закрашены два нескомпенсированных клина; оба их «заряженных» конца — на правой дуге.

4. Сложение векторов в точке $(x; 0)$. Векторы полей двух клиньев — на рис. 7. $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ одинаковы по модулю и направлены под углами $45°$ к оси $-OX$ по разные стороны от неё. Проекция на ось OY: $E_0 \sin 45° -$

$E_0 \sin 45^\circ = 0$. Проекция на ось OX:

$$E_x = -2E_0 \cos 45^\circ = -\sqrt{2}\,E_0 = -\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}\,\sigma x}{2\pi\varepsilon_0 R} = -\frac{\sigma x}{\pi\varepsilon_0 R}, \qquad E_y = 0.$$

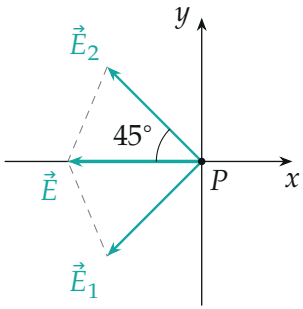

Рис. 7. Поля двух нескомпенсированных клиньев в точке $P = (x; 0)$: проекции на OY сокращаются, на OX складываются.

Знак минус: поле направлено к оси цилиндра — ближняя к точке заряженная дуга «отталкивает» сильнее дальней.

5. Точка $(0; y)$: суперпозиция. Заряженных дуг на оси OY нет, поэтому представим цилиндр как сумму (рис. 8): весь цилиндр, заряженный с плотностью $+\sigma$, плюс верхняя и нижняя четвертинки с плотностью $-\sigma$. Сумма даёт ровно исходное распределение: на верхней и нижней четвертинках $\sigma - \sigma = 0$.

Поле целиком заряженного цилиндра внутри равно нулю (шаг 2: все клинья скомпенсированы). Четвертинки $-\sigma$ на оси OY — та же конфигурация, что в шагах 3–4, повёрнутая на 90° и с другим знаком заряда. Для зарядов $+\sigma$ поле в точке $(0; y)$ было бы $-\dfrac{\sigma y}{\pi\varepsilon_0 R}$ по оси OY (к оси цилиндра); смена знака заряда меняет направление:

$$E_y = +\frac{\sigma y}{\pi\varepsilon_0 R}, \qquad E_x = 0.$$

Поле направлено от оси цилиндра.

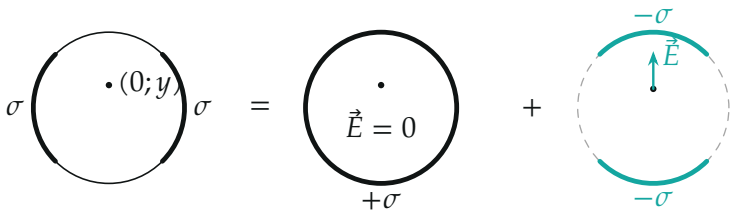

Рис. 8. Исходный цилиндр = целиком заряженный $+\sigma$ (поля внутри нет) + две четвертинки $-\sigma$ на оси OY.

Обратите внимание. Поле у центра не центрально-симметрично: по оси OX оно направлено к центру, по оси OY — от центра (рис. 9). Это «седло», как и должно быть: в пустой области поле не может сходиться к точке со всех сторон (теорема Гаусса для малого цилиндра вокруг оси дала бы нулевой поток, а не отрицательный). Сумма $\partial E_x/\partial x + \partial E_y/\partial y = -\dfrac{\sigma}{\pi\varepsilon_0 R} + \dfrac{\sigma}{\pi\varepsilon_0 R} = 0$ — зарядов внутри нет.

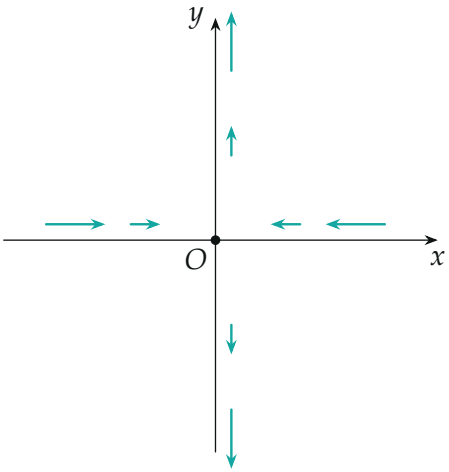

Рис. 9. Поле у центра: вдоль OX — к центру, вдоль OY — от центра; модуль растёт пропорционально расстоянию.

Проверка. Размерность: $\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ — напряжённость (поле плоскости $\sigma/2\varepsilon_0$), x/R безразмерно. Предел $x \to 0$: поле в центре равно нулю, как требует симметрия. Второй способ — прямое суммирование полей нитей по дугам на компьютере при $x = 0{,}01R$ даёт

$E_x = -0{,}9994\,\sigma x/(\pi\varepsilon_0 R)$ и $E_y = +1{,}0006\,\sigma y/(\pi\varepsilon_0 R)$ — совпадает с ответом.

Поле у центра линейно по смещению: каждая точка видит «лишние» заряженные полоски только у границ четвертинок, и угол этих полосок растёт пропорционально смещению.

Ответ. В точке $(x;0)$: $E_x = -\dfrac{\sigma x}{\pi\varepsilon_0 R}$, $E_y = 0$ (к оси цилиндра); в точке $(0;y)$: $E_x = 0$, $E_y = \dfrac{\sigma y}{\pi\varepsilon_0 R}$ (от оси цилиндра).