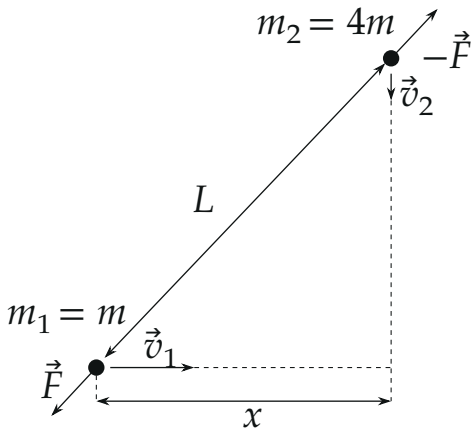
Разлетающиеся зонды

Задача 5. [ВсОШ 2020/21, заключительный этап, 10 класс, задача 5] «Разлетающиеся зонды».

Два автономных исследовательских зонда движутся навстречу друг другу с выключенными двигателями в глубоком космосе вдали от других тел курсами, пересекающимися под прямым углом. Масса первого зонда равна $m_1 = m$, а его скорость $v_1 = v$. Масса второго зонда $m_2 = 4m$, а скорость $v_2 = v/3$. В момент времени, когда расстояние между зондами становится равным L, а расстояние от первого зонда до точки пересечения траекторий — x, на обоих зондах включаются двигатели с постоянной по модулю силой тяги F, при этом вектор силы тяги в любой момент времени направлен противоположно направлению на другой зонд. Рисунок приведён для момента включения двигателей. Двигатели выключаются, когда расстояние между зондами становится равным $2L$. Размеры зондов малы по сравнению с L, а их гравитационным взаимодействием можно пренебречь.



1. При каком значении $x = x_{кр}$ произошло бы столкновение зондов, если бы двигатели на них не включались?
2. Найдите минимальное значение силы тяги $F_{мин}$, при котором зонды не столкнутся, если $x = x_{кр}$.

3. Пусть величины сил тяги двигателей равны $F = F_{\text{мин}} + dF$ ($dF \ll F_{\text{мин}}$), а $x = x_{\text{кр}}$. Найдите вектор конечной скорости первого зонда в виде $\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2$.
4. Пусть сила тяги двигателей равна F, а $x = x_1$ ($x_1 > x_{\text{кр}}$). Найдите модуль конечной скорости первого зонда относительно второго.

▲ **Решение. Что происходит.** Задача класса «движение двух тел: относительное движение + движение центра масс». Силы тяги равны по модулю и противоположны по направлению — как силы взаимодействия. Значит, центр масс системы движется равномерно, а относительное движение описывается одним уравнением с приведённой массой. Работа силы, всегда направленной вдоль линии зондов, зависит только от начального и конечного расстояния — отсюда закон изменения энергии относительного движения.

Обозначения. $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ — положение второго зонда относительно первого, r — расстояние между зондами; $\vec{u} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ — скорость второго относительно первого, u_0 — её модуль в момент включения; $\vec{v}_C$ — скорость центра масс.

Пункт 1.

1. Условие встречи. Без двигателей оба зонда движутся равномерно и прямолинейно. Столкнуться они могут только в точке пересечения курсов O, и только если приходят туда одновременно (рис. 1). Первому до O идти x, второму — $\sqrt{L^2 - x^2}$ (теорема Пифагора для треугольника с гипотенузой L):

$$\frac{x}{v} = \frac{\sqrt{L^2 - x^2}}{v/3} \;\Rightarrow\; x^2 = 9(L^2 - x^2) \;\Rightarrow\; x_{\text{кр}} = \frac{3L}{\sqrt{10}} \approx 0{,}95L.$$

Тогда второй зонд на расстоянии $\sqrt{L^2 - x_{\text{кр}}^2} = L/\sqrt{10}$ от O.

2. То же глазами первого зонда. Скорость второго относительно первого $\vec{u} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ (рис. 1, треугольник скоростей). Катеты v и $v/3$, поэтому

$$u_0 = \sqrt{v^2 + \frac{v^2}{9}} = \frac{\sqrt{10}}{3}\,v,$$

а наклон $\vec{u}$ — катеты в отношении 3 : 1, как и у отрезка между зондами при $x = x_{кр}$ (катеты $3L/\sqrt{10}$ и $L/\sqrt{10}$). При $x = x_{кр}$ вектор $\vec{u}$ направлен точно на первый зонд — это и есть условие столкновения.

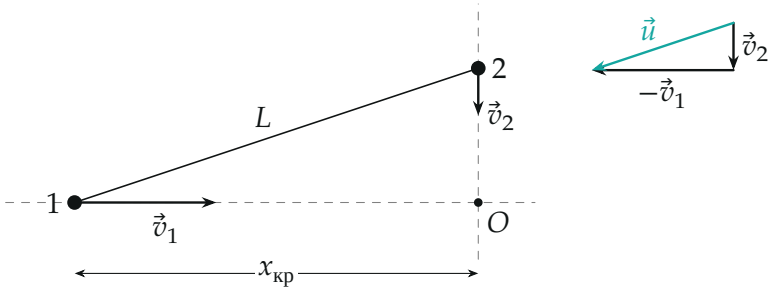


Рис. 1. Положение при $x = x_{кр}$ (слева) и треугольник скоростей $\vec{u} = \vec{v}_2 + (-\vec{v}_1)$ (справа). Наклон $\vec{u}$ совпадает с наклоном отрезка L.

Пункт 2.

3. Уравнение относительного движения. На первый зонд действует сила тяги $-F\hat{r}$ (от второго), на второй — $+F\hat{r}$, где $\hat{r} = \vec{r}/r$. Второй закон Ньютона для каждого зонда:

$$m_1\vec{a}_1 = -F\hat{r}, \qquad m_2\vec{a}_2 = F\hat{r},$$

$$\vec{a}_2 - \vec{a}_1 = F\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\hat{r} = \frac{F}{\mu}\hat{r}, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{4m}{5}.$$

Это то же самое, что перейти в систему первого зонда: там на второй действуют сила тяги $F\hat{r}$ и сила инерции $-m_2\vec{a}_1 = \dfrac{m_2}{m_1}F\hat{r}$ (обе от первого зонда, рис. 2). Относительное движение — движение тела массы μ под действием силы F, направленной от первого зонда.

4. Энергия относительного движения. Сила $F\hat{r}$ направлена вдоль $\vec{r}$, её работа при изменении расстояния от $r_{нач}$ до $r_{кон}$ равна $F(r_{кон} - r_{нач})$ при любой форме траектории. Теорема о кинетической энергии для относительного движения:

$$\frac{\mu u^2}{2} - \frac{\mu u_0^2}{2} = F\,(r - L). \qquad (1)$$

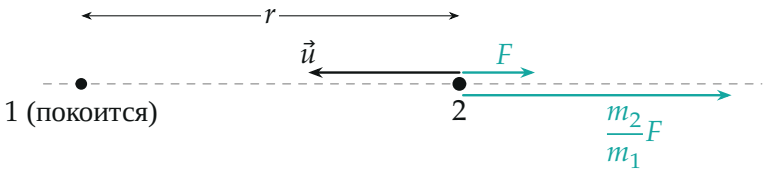


Рис. 2. При $x = x_{кр}$ в системе первого зонда второй движется прямо на него; на второй действуют сила тяги F и сила инерции $\frac{m_2}{m_1}F$, обе от первого.

5. Минимальная сила. При $x = x_{кр}$ скорость $\vec{u}$ направлена вдоль линии зондов, сила тоже — движение прямолинейное: второй зонд тормозит, приближаясь к первому. Зонды не столкнутся, если u обратится в ноль раньше, чем r станет нулём. Предельный случай — остановка при $r = 0$: из (1) с $u = 0$, $r = 0$

$$\frac{\mu u_0^2}{2} = FL \;\Rightarrow\; F_{мин} = \frac{\mu u_0^2}{2L} = \frac{4m}{5}\cdot\frac{10v^2}{9}\cdot\frac{1}{2L} = \frac{4mv^2}{9L}.$$

Пункт 3.

6. Относительная скорость после разгона. При $F = F_{мин} + dF$ второй зонд останавливается почти вплотную к первому ($r \approx 0$) и разгоняется обратно по той же прямой до $r = 2L$. Из (1) на участке от $r = 0$ до $r = 2L$ с $F \approx F_{мин}$:

$$\frac{\mu u^2}{2} = F_{мин}\cdot 2L = \mu u_0^2 \;\Rightarrow\; u = \sqrt{2}\,u_0,$$

а направление противоположно начальному: $\vec{u}_{кон} = -\sqrt{2}\,\vec{u}_0 = -\sqrt{2}\,(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$.

7. Центр масс. Внешних сил на систему двух зондов нет (силы тяги равны и противоположны), поэтому скорость центра масс постоянна:

$$\vec{v}_C = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{\vec{v}_1 + 4\vec{v}_2}{5}.$$

8. Конечная скорость первого зонда. Скорость первого зонда относительно центра масс: $\vec{v}_1 - \vec{v}_C = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\,\vec{u} = -\frac{4}{5}\vec{u}$ (из $m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}_C) +$

$m_2(\vec{v}_2 - \vec{v}_C) = 0$). В конце

$$\vec{v}_{1к} = \vec{v}_C - \frac{4}{5}\vec{u}_{кон} = \frac{\vec{v}_1 + 4\vec{v}_2}{5} + \frac{4\sqrt{2}}{5}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1),$$

$$\vec{v}_{1к} = \frac{1 - 4\sqrt{2}}{5}\vec{v}_1 + \frac{4(1 + \sqrt{2})}{5}\vec{v}_2.$$

Векторное сложение — на рис. 3.

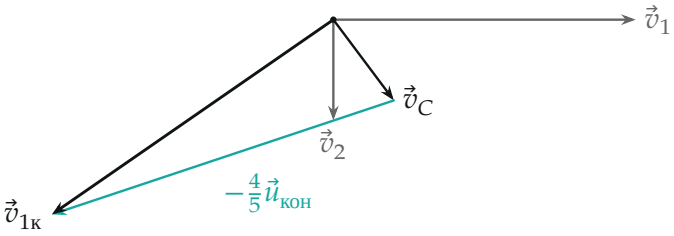


Рис. 3. Конечная скорость первого зонда (масштаб $v = 4$ см): $\vec{v}_C$ плюс скорость относительно центра масс $-\frac{4}{5}\vec{u}_{кон} = \frac{4\sqrt{2}}{5}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$.

Пункт 4.

9. Непрямолинейное относительное движение. При $x_1 > x_{кр}$ вектор $\vec{u}$ уже не направлен на первый зонд, второй пролетает мимо по кривой (рис. 4). Но сила по-прежнему направлена вдоль $\vec{r}$, её работа $F(r - L)$ от формы пути не зависит. Модуль начальной относительной скорости тот же: $u_0 = \sqrt{10}\,v/3$ (катеты v и $v/3$ от x не зависят). Отталкивающая сила не даёт зондам сблизиться до нуля и в итоге разводит их до $2L$. Из (1) при $r = 2L$:

$$u^2 = u_0^2 + \frac{2FL}{\mu} = \frac{10v^2}{9} + \frac{5FL}{2m} \;\Rightarrow\; u = \sqrt{\frac{10v^2}{9} + \frac{5FL}{2m}}.$$

Скорость первого относительно второго $-\vec{u}$, модуль тот же.

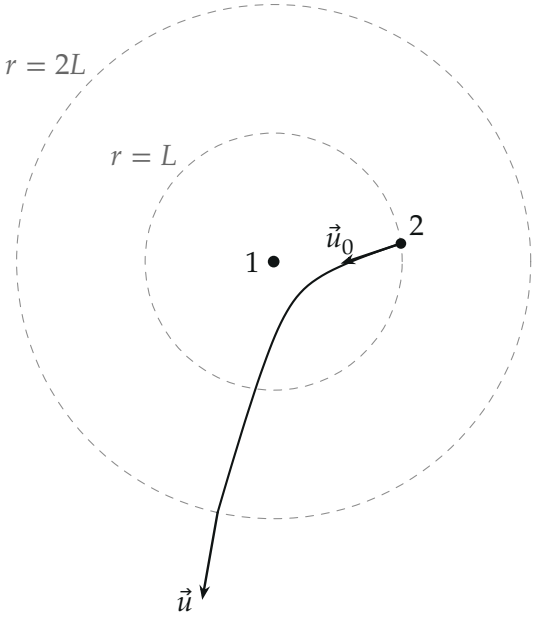


Рис. 4. Траектория второго зонда в системе первого при $x_1 = 0{,}99L$, $F = F_{мин}$ (численный расчёт): зонды не сталкиваются, u^2 на выходе равно $u_0^2 + 2FL/\mu$.

Обратите внимание. В пункте 3 конечная относительная скорость $\sqrt{2}\,u_0$, а не u_0: двигатели работают и при сближении (тормозят на пути L), и при разлёте (разгоняют на пути $2L$), суммарная работа положительна.

Проверка. Размерность: $\dfrac{mv^2}{L}$ — сила, $\dfrac{FL}{m}$ — квадрат скорости. Пункт 3, второй способ — импульс системы: $m\vec{v}_{1к} + 4m\vec{v}_{2к}$ должен равняться $m\vec{v}_1 + 4m\vec{v}_2$; с $\vec{v}_{2к} = \vec{v}_C + \frac{1}{5}\vec{u}_{кон} = \frac{\vec{v}_1+4\vec{v}_2}{5} - \frac{\sqrt{2}}{5}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$ сумма $m\vec{v}_C + 4m\vec{v}_C = m\vec{v}_1 + 4m\vec{v}_2$ — верно. Пункт 4: при $F \to 0$ ответ $u \to u_0$ — без двигателей относительная скорость не меняется. Численный расчёт траектории (рис. 4) даёт $u^2/u_0^2 = 2{,}000$ при $2FL/(\mu u_0^2) = 1$ — совпадает с (1).

Силы тяги внутренние для пары зондов: они не трогают центр масс и совершают над относительным движением работу, зависящую только от расстояния.

Ответ. 1) $x_{\text{кр}} = \dfrac{3L}{\sqrt{10}}$; 2) $F_{\text{мин}} = \dfrac{4mv^2}{9L}$; 3) $\vec{v}_{1\text{к}} = \dfrac{1-4\sqrt{2}}{5}\vec{v}_1 + \dfrac{4(1+\sqrt{2})}{5}\vec{v}_2$; 4) $u = \sqrt{\dfrac{10v^2}{9} + \dfrac{5FL}{2m}}$.