Капилляр

Задача E1. [ВсОШ 2020/21, заключительный этап, 11 класс, практический тур, задача E1] «Капилляр». При ламинарном (без завихрений) течении жидкости по трубке скорость движения изменяется от нуля у стенки трубки до максимального значения на её оси (пуазейлевский профиль скоростей). Так как соседние слои жидкости движутся с различными скоростями, между ними возникает сила трения, значение которой характеризуется физической величиной η, называемой коэффициентом вязкости. Согласно формуле Пуазейля объём жидкости Q, протекающий по трубке в единицу времени (расход), связан с коэффициентом вязкости соотношением

$$Q = \frac{\Delta p\, \pi r^4}{8\eta l},$$

где Δp — разность давлений на концах трубки, r — радиус трубки, l — длина трубки. При этом формула Пуазейля применима, только если длина трубки удовлетворяет соотношению $l \gg l_0 \sim \frac{1}{\eta}\sqrt{\rho\sigma r^3}$, иначе пуазейлевский профиль скоростей не успеет установиться. Здесь ρ — плотность жидкости, σ — коэффициент поверхностного натяжения.

Вам предлагается определить вязкость выданной Вам неизвестной жидкости.

Оборудование: шприц с неизвестной жидкостью вместимостью 5 мл, шприц с подкрашенной водой вместимостью 10 мл, капилляры диаметром 0,3 мм (10 штук), линейка, секундомер, пластина из оргстекла.

1. Определите краевой угол смачивания θ внутренней поверхности капилляра водой. Коэффициент поверхностного натяжения воды принять равным $\sigma_в = 0{,}073$ Н/м, плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3, ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2.
2. Определите коэффициент поверхностного натяжения неизвестной жидкости, считая, что для неё краевой угол смачивания совпадает с краевым углом смачивания воды. Плотность неизвестной жидкости равна $\rho_ж = 1200$ кг/м^3.

3. Предложите способ экспериментального определения коэффициента вязкости неизвестной жидкости. Приведите его теоретическое обоснование с выводом необходимых формул. Подробно опишите схему проведения эксперимента.
4. Определите коэффициент вязкости неизвестной жидкости.
5. С помощью рассчитанного значения коэффициента вязкости оцените характерную длину установления пуазейлевского профиля скоростей l_0.

Примечание: краевой угол смачивания — угол, который образуется между касательной к поверхности жидкости в точке её контакта с твёрдой поверхностью (рис. 1).

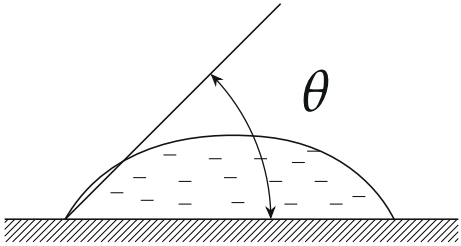

Рис. 1. Краевой угол смачивания θ.

Замена капилляров и жидкости не предусмотрена, поэтому тщательно планируйте свои действия. Если при выполнении отдельного измерения у Вас осталась неиспользованной значительная часть капилляра, Вы можете аккуратно отломить её и использовать ещё раз. Часть капилляра, в которой побывала жидкость, повторно использовать нельзя из-за изменения свойств поверхности при смачивании. При длительном нахождении исследуемой жидкости на открытом воздухе некоторые легколетучие компоненты в её составе могут частично испаряться, что существенно повлияет на качество результатов.

▲ **Решение. Что происходит.** Опыт состоит из двух частей. В первой жидкость поднимается по вертикальному капилляру и останавливается, когда давление столба уравновешено давлением изогнутой поверхности: это даёт краевой угол и коэффициент поверхностного натяжения.

Во второй жидкость втекает в горизонтальный капилляр: движущая сила — то же давление изогнутой поверхности (мениска), тормоз — вязкое трение о стенки, и по скорости втекания находится вязкость. Ключевые законы — условие равновесия жидкости (давление под мениском и гидростатика) и формула Пуазейля, которую условие разрешает использовать. Задача относится к капиллярным явлениям и течению вязкой жидкости по тонкой трубке.

Обозначения. Радиус капилляра $r = 0{,}15$ мм (диаметр 0,3 мм). Для воды: $\sigma_в$, $\rho_в$, высота подъёма $h_в$. Для неизвестной жидкости: σ, $\rho_ж$, высота подъёма $h_ж$, вязкость η. Краевой угол θ — один для обеих жидкостей по условию. Атмосферное давление p_0.

Значения в таблицах ниже — расчётный пример обработки: числа заданы по модели опыта (с реалистичным разбросом), поскольку условие не содержит данных измерений; у каждого участника показания свои, а формулы и порядок действий те же.

Пункт 1. Краевой угол смачивания.

1. Почему жидкость поднимается и останавливается. Вода смачивает стекло, поэтому поверхность воды в узком капилляре — вогнутый мениск, часть сферы радиуса R. Касательная к мениску у стенки образует со стенкой угол θ; радиус сферы перпендикулярен касательной, поэтому он образует с горизонталью тот же угол θ, и из прямоугольного треугольника с катетом r получаем

$$R = \frac{r}{\cos\theta}.$$

Давление внутри жидкости непосредственно под вогнутой сферической поверхностью меньше давления воздуха на лапласовскую добавку $2\sigma/R$. Точка M — нижняя точка мениска на оси, точка N — на оси в капилляре на уровне свободной поверхности капли, в которую капилляр опущен (рисунок 2).

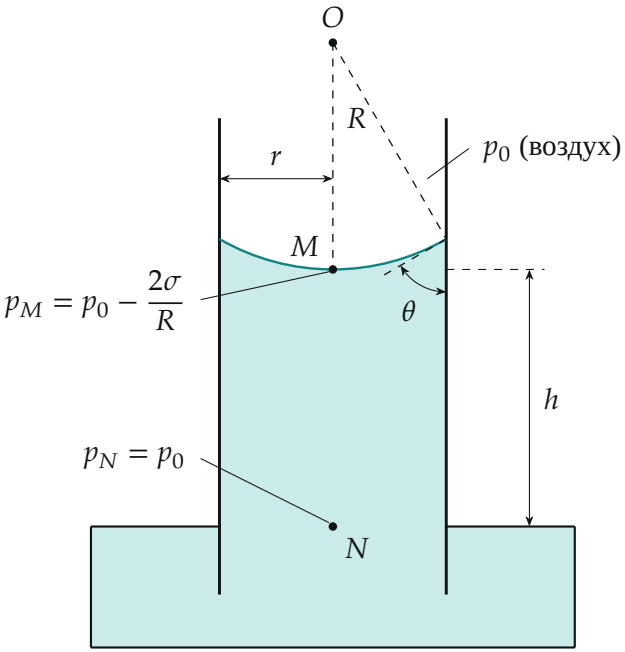

Рис. 2. Вогнутый мениск в капилляре: радиус кривизны $R = r/\cos\theta$, высота подъёма h отсчитывается от свободной поверхности до нижней точки мениска.

2. Условие равновесия. Жидкость в капилляре покоится. Давление в одной и той же жидкости на одном уровне одинаково, а точка N лежит на уровне свободной поверхности, где давление равно атмосферному: $p_N = p_0$. По закону гидростатики давление растёт с глубиной:

$$p_N = p_M + \rho g h \quad \Rightarrow \quad p_0 = p_0 - \frac{2\sigma\cos\theta}{r} + \rho g h, \qquad h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g r}.$$

Формула применима к статической картине: после остановки столба, при $h \gg r$ (поправка на объём жидкости в самом мениске порядка $r/3 \approx 0{,}05$ мм, это меньше погрешности линейки).

3. Что измерять. Из формулы

$$\cos\theta = \frac{\rho_в\, g\, r\, h_в}{2\sigma_в},$$

известны все величины, кроме $h_в$. Схема опыта (рисунок 3): на оргстекло шприцем с подкрашенной водой выдавливаем большую плоскую каплю, к её середине вертикально подносим сухой капилляр. Вода входит и поднимается, затем столб останавливается; линейкой, стоящей рядом, читаем уровень поверхности капли и уровень нижней точки мениска, высота подъёма $h_в$ — их разность.

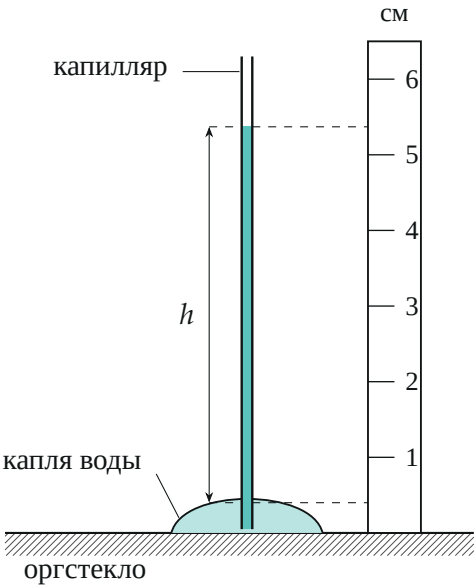

Рис. 3. Измерение высоты подъёма: рисунок по вертикали в натуральную величину, по ширине не в масштабе. Нуль линейки не обязан совпадать с каплей: важна разность двух отсчётов.

4. Порядок измерений и результат. Проводим измерение для четырёх капилляров, каждый раз ждём остановки столба (у воды она мгновенная), отсчёт — по нижней точке мениска, так как формула написана для неё. Модельные показания: $h_в = 49{,}5;\ 50{,}0;\ 49{,}0;\ 50{,}0$ мм, среднее $h_в = 49{,}6$ мм. Тогда

$$\cos\theta = \frac{1000 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}15 \cdot 10^{-3} \cdot 49{,}6 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 0{,}073} \approx 0{,}50, \qquad \theta \approx 60^\circ.$$

Обратите внимание. Часть капилляра, в которой побывала жидкость, использовать повторно нельзя: после смачивания поверхность другая. Поэтому для следующего измерения отламываем смоченный участок и берём сухой кусок или новый капилляр. Капилляров десять: по четыре идёт на воду и на неизвестную жидкость, два остаются для пункта 4.

Пункт 2. Поверхностное натяжение неизвестной жидкости.

5. Тот же опыт с другой жидкостью. Условие подъёма то же: $h_ж = \dfrac{2\sigma\cos\theta}{\rho_ж g r}$, причём $\cos\theta$ и r те же. Делим формулу воды на формулу неизвестной жидкости: радиус, угол и ускорение сокращаются,

$$\frac{h_ж}{h_в} = \frac{\sigma\,\rho_в}{\sigma_в\,\rho_ж} \quad\Rightarrow\quad \sigma = \sigma_в\,\frac{\rho_ж\,h_ж}{\rho_в\,h_в}.$$

Точное значение r и сам угол для этого пункта не нужны — остаются отношения высот и плотностей.

Модельные показания (по четыре капилляра; неизвестная жидкость вязкая, столб поднимается около полуминуты, поэтому ждём остановки): $h_ж = 34;\ 34;\ 33;\ 35$ мм, среднее $h_ж = 34{,}0$ мм:

$$\sigma = 0{,}073 \cdot \frac{1200 \cdot 34{,}0}{1000 \cdot 49{,}6} \approx 0{,}060\ \text{Н/м} = 60\ \text{мН/м}.$$

Пункт 3. Способ определения вязкости.

6. Идея и выбор способа. Нужна жидкость, которая течёт по капилляру под известным перепадом давления Δp. Источник давления можно взять готовым: тот же капиллярный эффект. Если капилляр лежит горизонтально и его конец касается капли, жидкость втягивается внутрь сама, причём гидростатическое давление не играет роли (ось капилляра на уровне капли). Скорость втекания зависит от вязкости: чем вязче, тем медленнее. Измеряем длину L заполненной части в зависимости от времени t. Способ с поршнем шприца непригоден: перепад давления, создаваемый рукой, неизвестен.

Схема опыта (рисунок 4): сухой капилляр кладём на оргстекло, шприцем с неизвестной жидкостью выдавливаем на край капилляра большую плоскую каплю, конец капилляра касается капли; рядом положена ли-

нейка с нулём у входного конца. Секундомер запускаем в момент, когда жидкость вошла в капилляр, и записываем моменты t_i, когда мениск проходит отметки $L_i = 5; 10; \ldots; 50$ мм (десять точек, диапазон не меньше 5 см).

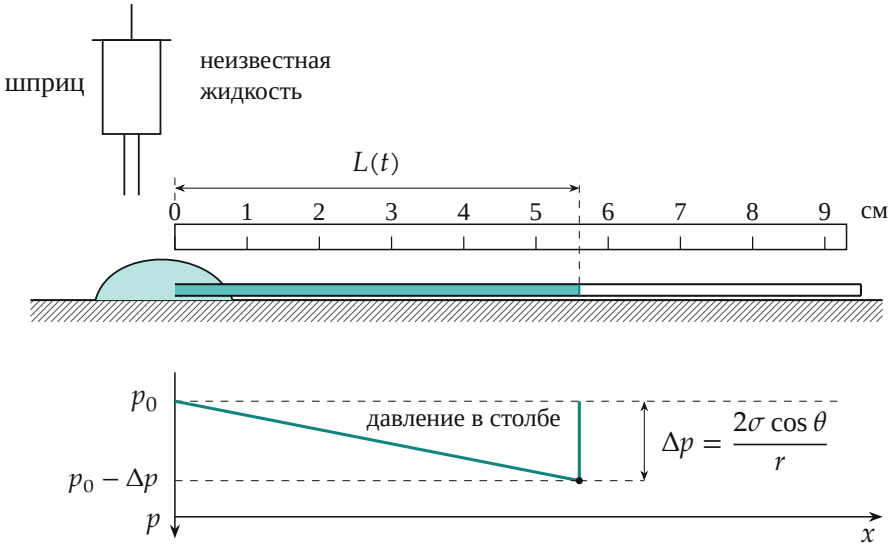

Рис. 4. Горизонтальный капилляр, втекание неизвестной жидкости и давление вдоль столба. Ширина капилляра не в масштабе.

7. Какой перепад давления. У входа жидкость связана с большой плоской каплей, где давление практически атмосферное, p_0. Перед самим мениском (изнутри) давление, как в пункте 1, равно $p_0 - 2\sigma\cos\theta/r$. Вдоль столба давление падает за счёт вязкого трения (прямая на нижнем графике). Значит, на концах заполненной части трубки

$$\Delta p = \frac{2\sigma\cos\theta}{r}.$$

Силы тяжести в горизонтальном капилляре вдоль оси нет, поэтому Δp не меняется со временем: растёт только длина столба.

8. Закон движения мениска. За малое время dt мениск проходит dL, и в капилляр входит объём $\pi r^2\, dL$. Тот же объём равен расходу, умно-

женному на время. По формуле Пуазейля для столба длиной L:

$$\pi r^2 \frac{dL}{dt} = \frac{\Delta p\, \pi r^4}{8\eta L} \quad \Rightarrow \quad L\frac{dL}{dt} = \frac{r^2 \Delta p}{8\eta} = \frac{\sigma r \cos\theta}{4\eta}.$$

Левая часть — производная $\dfrac{d}{dt}\dfrac{L^2}{2}$, правая — постоянная. Суммируя от начала втекания, где $L = 0$, до момента t, получаем

$$L^2 = \frac{\sigma r \cos\theta}{2\eta}\, t \;=\; k\, t, \qquad \eta = \frac{\sigma r \cos\theta}{2k}.$$

Квадрат длины растёт пропорционально времени: график L^2 от t — прямая, а по её наклону k находится вязкость.

Формула применима, когда столб заметно длиннее длины установления профиля, $L \gg l_0$ (иначе профиль не пуазейлевский), и когда течение медленное: инерцией можно пренебречь. Число Рейнольдса при $L = 5$ мм здесь около 0,02 — течение ламинарное и безинерционное.

Пункт 4. Вязкость.

9. Данные. Время начала в опыте нельзя поймать идеально (запуск секундомера и вход жидкости в капилляр), поэтому прямая может не проходить через начало — это не мешает: нужен наклон. Модельные показания:

L, мм	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
t, с	0,7	3,0	6,3	10,5	16,6	23,9	32,8	42,7	54,2	66,2
L^2, мм^2	25	100	225	400	625	900	1225	1600	2025	2500

Строим график в линеаризованных координатах L^2, t (рисунок 5) и проводим прямую по методу наименьших квадратов (расчёт на компьютере): $k = 37{,}7$ мм^2/с (пересечение с осью L^2 около -6 мм^2, то есть сдвиг начала на 0,15 с).

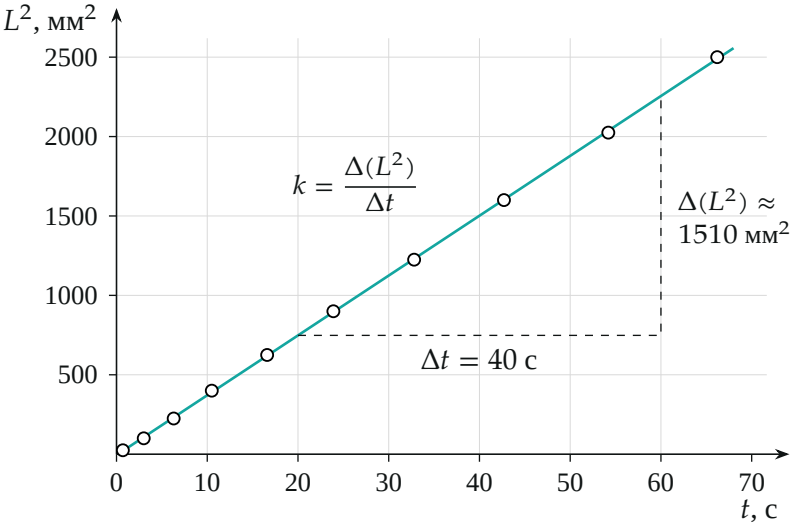

Рис. 5. Зависимость $L^2(t)$: точки опыта (расчётный пример) и прямая по методу наименьших квадратов.

10. Вязкость. Подставляем $\sigma = 0{,}060$ Н/м, $r = 0{,}15 \cdot 10^{-3}$ м, $\cos\theta = 0{,}50$, $k = 37{,}7 \cdot 10^{-6}$ м^2/с:

$$\eta = \frac{\sigma r \cos\theta}{2k} = \frac{0{,}060 \cdot 0{,}15 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}50}{2 \cdot 37{,}7 \cdot 10^{-6}} \approx 0{,}060 \text{ Па} \cdot \text{с} = 60 \text{ мПа} \cdot \text{с}.$$

Пункт 5. Длина установления профиля.

11. Оценка. По формуле из условия, с найденной вязкостью и $r = 0{,}15$ мм:

$$l_0 \sim \frac{1}{\eta}\sqrt{\rho_ж \sigma r^3} = \frac{1}{0{,}060}\sqrt{1200 \cdot 0{,}060 \cdot (0{,}15 \cdot 10^{-3})^3}$$
$$\approx 2{,}6 \cdot 10^{-4} \text{ м} \approx 0{,}3 \text{ мм}.$$

Это оценка по порядку величины: если подставить диаметр вместо радиуса, получится около 0,7 мм, то же порядка десятых долей миллиметра. Наименьшая длина столба в опыте — 5 мм, то есть примерно в 20 раз больше l_0: пуазейлевский профиль на всём диапазоне измерений установился (рисунок 6).

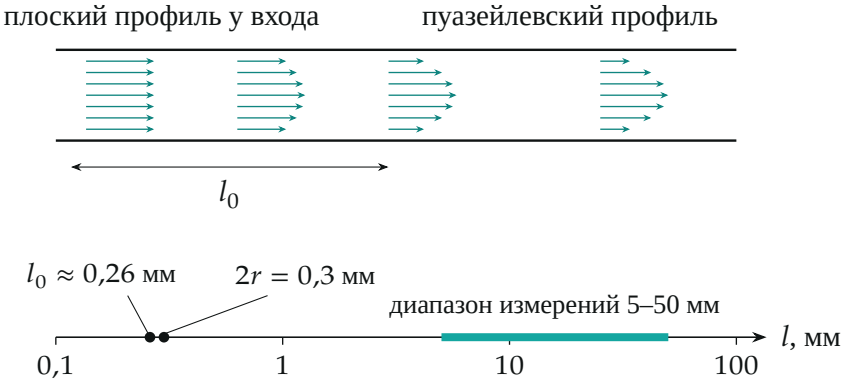

Рис. 6. Вверху: профиль скоростей перестраивается на длине порядка l_0 от входа (качественно). Внизу: масштаб длин (логарифмическая шкала) — весь диапазон измерений лежит далеко справа от l_0.

Проверка. Размерность: $\dfrac{\sigma r \cos\theta\, t}{\eta}$ имеет единицы $\dfrac{\text{Н/м} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{\text{Па} \cdot \text{с}} = \dfrac{\text{Н}}{\text{Па}} = \text{м}^2$, как у L^2. Второй способ — по одной точке без графика, $L = 50$ мм, $t = 66{,}2$ с:

$$\eta = \frac{\sigma r \cos\theta\, t}{2L^2} = \frac{4{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot 66{,}2}{2 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-3}}\ \text{Па} \cdot \text{с} \approx 0{,}060\ \text{Па} \cdot \text{с},$$

то же. Сравнение с водой: при тех же r и θ у воды $k = \sigma_\text{в} r \cos\theta/(2\eta_\text{в}) \approx 2700$ мм^2/с, она заполнила бы 5 см примерно за секунду — потому подъём воды в пункте 1 мгновенный, а неизвестной жидкости нужно около 30 с.

Смысл: капиллярное давление, которое поднимало столб в пункте 1, во втором опыте тянет жидкость в горизонтальный капилляр, а вязкость превращает постоянную силу в медленный рост $L \propto \sqrt{t}$; по наклону прямой $L^2(t)$ вязкость определяется прямо.

Ответ. 1) $\theta \approx 60°$ ($\cos\theta \approx 0{,}50$); 2) $\sigma = \sigma_\text{в} \dfrac{\rho_\text{ж} h_\text{ж}}{\rho_\text{в} h_\text{в}} \approx 60$ мН/м; 3) метод горизонтального капилляра: $L^2 = \dfrac{\sigma r \cos\theta}{2\eta} t$, вязкость по наклону графика $L^2(t)$; 4) $\eta \approx 60$ мПа·с; 5) $l_0 \approx 0{,}3$ мм.