Куда упадет шарик?

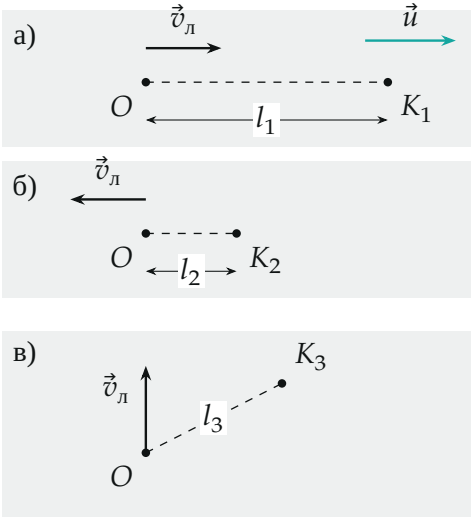
Задача 1. [ВсОШ 2020/21, 11 класс, задача 1] С лодки, движущейся по течению реки, опускают в воду металлический шарик. Шарик падает на дно реки на расстоянии l_1 по горизонтали от места, где его опустили в воду. Если опустить в воду шарик с лодки, движущейся против течения, то шарик падает на дно на расстоянии l_2 ниже по течению. Для лодки, переплывающей реку по траектории, перпендикулярной течению реки, расстояние до точки падения на дно составляет l_3.

1. Чему равно расстояние до точки падения на дно для лодки, движущейся в озере той же глубины, что и река?
2. Во сколько раз скорость лодки больше скорости течения?

Величина проекции скорости шарика на вертикальное направление при падении в воду равна нулю, закон зависимости силы сопротивления при движении шарика в воде неизвестен, все расстояния отсчитываются по горизонтали от места падения шарика в воду до места падения его на дно. Течение реки и её глубина везде одинаковы. Двигатель лодки развивает постоянную силу тяги независимо от направления движения.

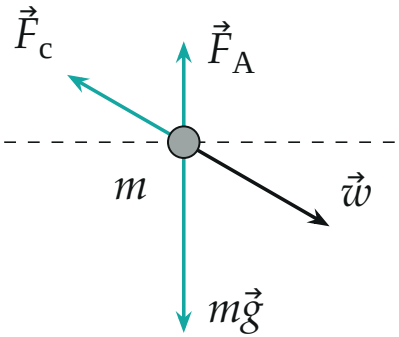
▲ **Решение. Что происходит.** Шарик тонет в воде, а вода сама движется со скоростью течения. Сила сопротивления зависит только от скорости шарика *относительно воды*, поэтому течение не влияет на то, как шарик тонет, — оно лишь сносит вместе с водой и шарик, и всё, что в ней. Главная идея: перейти в систему отсчёта, связанную с водой. В ней вода покоится, лодка плывёт с одной и той же по модулю скоростью v при любом направлении (тяга постоянна), и три опыта различаются только направлением, куда лодка смотрит. Остаётся понять, как направление лодки сказывается на шарике, и сложить смещения.

Обозначения. u — скорость течения, v — скорость лодки относительно воды, τ — время, за которое шарик падает на дно, $\vec{l}$ — смещение шарика относительно воды за это время, $l = |\vec{l}|$. Ось x направим по течению. Система отсчёта воды инерциальна: течение одинаково везде, ускорений нет.



Вид сверху на три опыта: O — место, где шарик опустили в воду, K_1, K_2, K_3 — точки, куда он упал на дно, $\vec{v}_л$ — скорость лодки относительно берега, $\vec{u}$ — течение. В опыте в) лодка идёт строго поперёк, а шарик всё равно сносит вниз по течению.

1. Что одинаково во всех опытах. В системе воды шарик в момент опускания имеет ту же скорость, что и лодка: модуль v, направление — куда лодка плывёт относительно воды, вертикальная проекция равна нулю. Дальше на него действуют: сила тяжести и сила Архимеда (обе вертикальны) и сила сопротивления, направленная против скорости шарика относительно воды и зависящая только от её модуля. Закон сопротивления нам неизвестен, но он один и тот же при любом направлении: вода не выделяет горизонтальных направлений.

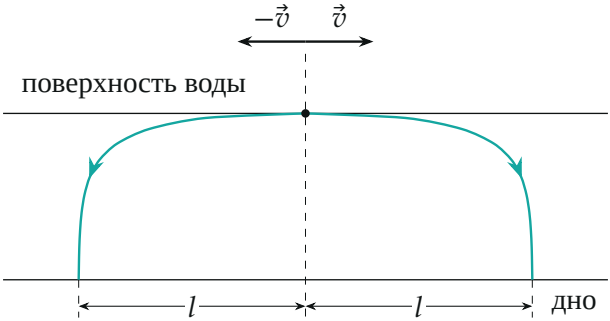


Силы на шарик в системе воды: $\vec{w}$ — скорость шарика относительно воды. Тяжесть и сила Архимеда вертикальны, сопротивление $\vec{F}_c$ направлено против $\vec{w}$ и зависит только от $|\vec{w}|$. Ни одна сила не выводит шарик из вертикальной плоскости, где лежит его начальная скорость.

Значит, вся картина симметрична относительно поворота вокруг вертикальной оси. Если повернуть начальную горизонтальную скорость шарика вокруг вертикали, траектория повернётся целиком, а глубина реки и всё, что связано с вертикальным движением, не изменится. Отсюда два вывода для всех трёх опытов:

- время падения τ одинаково (шарик проходит ту же глубину);
- смещение шарика относительно воды — вектор $\vec{l}$ одной и той же длины l, направленный вдоль скорости лодки относительно воды (траектория лежит в вертикальной плоскости, содержащей начальную скорость, потому что с обеих сторон от неё вода устроена одинаково).

Обратите внимание: из неизвестного закона сопротивления нам понадобилась только эта симметрия — сам закон в ответ не войдёт.



Траектория шарика относительно воды в вертикальной плоскости, проходящей через скорость лодки. Для лодки, плывущей в противоположную сторону, это зеркальное отражение; для любого другого горизонтального направления — поворот вокруг вертикали. Длина горизонтального смещения l и время падения τ те же (кривая рассчитана для примера закона $F = (k_1 + k_2|\vec{w}|)\vec{w}$).

2. Переход к берегу. За время τ вода вместе с шариком сдвигается по течению на $u\tau$. По закону сложения перемещений смещение шарика относительно берега равно

$$\vec{s} = \vec{l} + \vec{u}\,\tau,$$

а расстояние до точки падения — это $|\vec{s}|$. Теперь разберём три опыта.

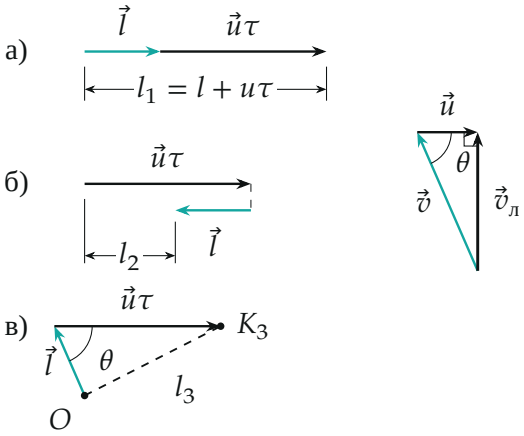
3. Три опыта.

- *По течению.* Лодка плывёт вниз по течению и относительно воды, поэтому $\vec{l} \uparrow\uparrow \vec{u}$ и $l_1 = l + u\tau$.
- *Против течения.* Лодка идёт против течения (относительно берега, значит $v > u$ и относительно воды тоже), $\vec{l} \uparrow\downarrow \vec{u}$. По условию шарик падает ниже по течению, то есть $u\tau > l$ и $l_2 = u\tau - l$.
- *Поперёк.* Скорость лодки относительно берега перпендикулярна течению. Она равна $\vec{v}+\vec{u}$, поэтому составляющая скорости $\vec{v}$ вдоль течения должна гасить течение: $v_x = -u$. Лодка идёт под углом θ к направлению против течения, причём (рисунок ниже)

$$\cos\theta = \frac{u}{v}.$$

Складываем перемещения $\vec{l}$ и $\vec{u}\tau$ «голова к хвосту». В треугольнике со сторонами l, $u\tau$ и l_3 угол между сторонами l и $u\tau$ равен θ, и по теореме косинусов

$$l_3^2 = l^2 + (u\tau)^2 - 2lu\tau\cos\theta = l^2 + (u\tau)^2 - 2lu\tau\,\frac{u}{v}.$$



Слева — сложение смещений в трёх опытах (для примера $u/v = 0{,}4$, $u\tau = 2{,}2\,l$). В опыте в) лодка идёт строго поперёк течения, но шарик сносит так, что точка падения K_3 лежит ниже по течению. Справа — сложение скоростей: скорость лодки относительно берега $\vec{v}_л = \vec{v} + \vec{u}$ перпендикулярна $\vec{u}$, откуда $\cos\theta = u/v$ (на рисунке $v = 2{,}5\,u$).

4. Первый вопрос. В озере течения нет, $u = 0$, и шарик смещается относительно воды, а значит и дна, ровно на l. Вычтем из выражения для l_1 выражение для l_2 (пункт 3):

$$l_1 - l_2 = 2l \quad\Rightarrow\quad l = \frac{l_1 - l_2}{2}.$$

5. Второй вопрос. Сложим те же выражения: $l_1 + l_2 = 2u\tau$, то есть $u\tau = \dfrac{l_1 + l_2}{2}$. Неизвестным в формуле для l_3 осталось только v/u (через

$\cos\theta$). В теорему косинусов входят две комбинации:

$$l^2 + (u\tau)^2 = \frac{(l_1 - l_2)^2 + (l_1 + l_2)^2}{4} = \frac{l_1^2 + l_2^2}{2},$$
$$2\,l\,u\tau = \frac{(l_1 - l_2)(l_1 + l_2)}{2} = \frac{l_1^2 - l_2^2}{2}.$$

Подставим в теорему косинусов:

$$l_3^2 = \frac{l_1^2 + l_2^2}{2} - \frac{l_1^2 - l_2^2}{2} \cdot \frac{u}{v} \quad \Rightarrow \quad \frac{u}{v} = \frac{l_1^2 + l_2^2 - 2l_3^2}{l_1^2 - l_2^2}.$$

Отсюда

$$\frac{v}{u} = \frac{l_1^2 - l_2^2}{l_1^2 + l_2^2 - 2l_3^2}.$$

Второй способ получить ту же формулу — в координатах: начало в точке O, ось x по течению. Смещение шарика относительно берега: $x = u\tau - l\cos\theta$, $y = l\sin\theta$, и $l_3^2 = x^2 + y^2 = l^2 + (u\tau)^2 - 2lu\tau\cos\theta$ — то же выражение.

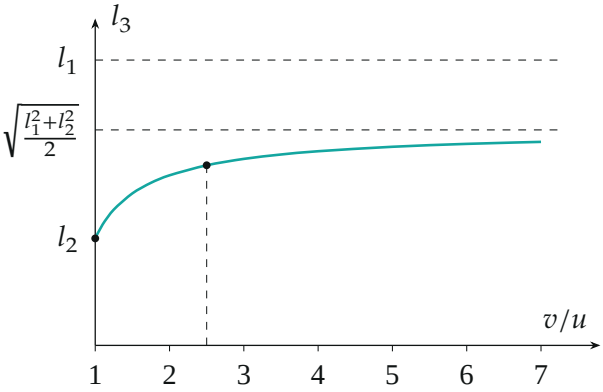
Проверка. Размерность: v/u — отношение квадратов длин к квадратам длин, безразмерно. Два предела.

Очень быстрая лодка ($v \gg u$): $\cos\theta \to 0$, $\vec{l} \perp \vec{u}\tau$ и $l_3^2 \to l^2 + (u\tau)^2 = \frac{l_1^2 + l_2^2}{2}$; знаменатель формулы стремится к нулю, значит $v/u \to \infty$, как и должно быть.

Лодка чуть быстрее течения ($v \to u$): $\theta \to 0$, $l_3 \to u\tau - l = l_2$, и формула даёт

$$\frac{v}{u} \to \frac{l_1^2 - l_2^2}{l_1^2 - l_2^2} = 1.$$

Значит, всегда $l_2 < l_3 < l_1$.



Расстояние l_3 при заданных l_1 и l_2 в зависимости от v/u (построено по формуле $l_3^2 = \frac{l_1^2+l_2^2}{2} - \frac{l_1^2-l_2^2}{2} \cdot \frac{u}{v}$ для $l_1 = 3{,}2$, $l_2 = 1{,}2$). При $v = u$ получается $l_3 = l_2$, при $v \to \infty$ — асимптота $\sqrt{(l_1^2 + l_2^2)/2}$, всё время $l_3 < l_1$. Точка — пример рисунков выше, $v/u = 2{,}5$, $l_3 \approx 2{,}02$.

Дополнительно ответ проверен численным опытом: в системе воды рассчитано падение шарика при силе сопротивления $F = (k_1 + k_2 w)\, w$, затем смещения перенесены на берег для трёх направлений лодки при $v/u = 17/6$. Получено $l_1 = 1{,}403$, $l_2 = 0{,}541$, $l_3 = 0{,}914$ (в условных единицах), формула даёт $v/u = 2{,}833$ — в точности заданное отношение; озеро: $0{,}431 = (l_1 - l_2)/2$.

Физический смысл: течение не меняет, как шарик тонет, а только сносит его вместе с водой; поэтому по трём измерениям на реке можно «вычесть» снос и узнать и смещение в стоячей воде, и скорость течения относительно скорости лодки.

Ответ. 1) $l = \dfrac{l_1 - l_2}{2}$; 2) $\dfrac{v}{u} = \dfrac{l_1^2 - l_2^2}{l_1^2 + l_2^2 - 2l_3^2}$.