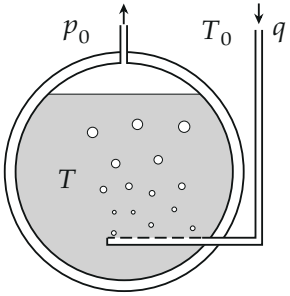
«Буль-буль»

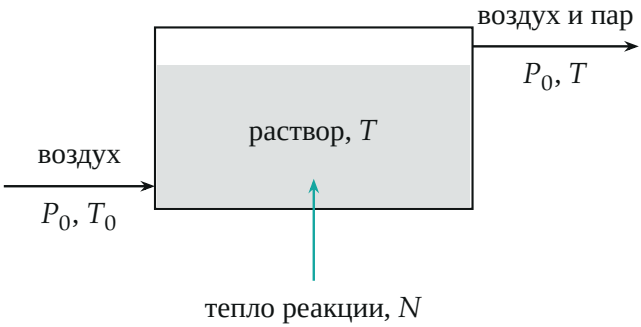
Задача 2. [ВсОШ 2020/21, 11 класс, задача 2] В реакторе в водном растворе некоторого вещества в результате химической реакции выделяется тепло с мощностью $N = 5$ кВт. Для регулирования температуры в реактор через трубки с маленькими отверстиями, проложенными на дне реактора, продувается воздух. Давление воздуха, подаваемого в реактор, можно считать равным атмосферному $P_0 = 10^5$ Па, температуру — равной температуре помещения $T_0 = 22\,^\circ$C. Определите объёмный расход воздуха q, необходимый для поддержания в реакторе температуры $T < T_K$, где $T_K = 100\,^\circ$C — температура кипения водного раствора при атмосферном давлении. Считайте $T_K - T \ll T_K$. Определите численное значение q для $T = 95\,^\circ$C.



Молярная теплота испарения при температуре T для воды известна: $\lambda = 40$ кДж/моль. Давление насыщенного водяного пара вблизи T_K меняется практически линейно с коэффициентом $\alpha = 3{,}5$ кПа/°C. Давление насыщенного пара над раствором в точности соответствует давлению насыщенного водяного пара. Теплотой, идущей на нагрев воздуха, можно пренебречь. Перепад давления на отводящей из реактора газ трубке пренебрежимо мал. В отсутствие подачи воздуха в реактор теплообмена с окружающей средой нет.

▲ **Решение. Что происходит.** Реакция непрерывно греет раствор, и без продувки тепло некуда деваться: раствор дошёл бы до кипения. Воздух уносит тепло так: пузырёк проходит через горячий раствор, насыщается водяным паром и выходит наружу вместе с ним. Пар возник за счёт

испарения воды, а испарение отнимает у раствора теплоту λ на каждый моль. В установившемся режиме T не меняется, значит, всё тепло реакции уходит с паром. Чем ниже T, тем меньше пара помещается в пузырёк (давление насыщенного пара меньше), и тем больше воздуха нужно прогнать. Это задача на насыщенный пар по шаблону: предположим, что пузырёк насыщен, и по его составу найдём, сколько пара приходится на моль воздуха.



Установившийся режим: тепло реакции N уходит с паром, воздух проходит сквозь раствор насквозь. Из реактора выходит насыщенная смесь при температуре раствора и атмосферном давлении.

Обозначения. Все величины берём за один и тот же промежуток времени τ установившегося режима. ν_1 — число молей воздуха, прошедшего через раствор за τ; ν_2 — число молей воды, испарившейся за τ (она вышла паром); $p_\text{п}$ и $p_\text{в}$ — парциальные давления пара и воздуха в пузырьке; $\Delta T = T_K - T$.

1. Баланс тепла. Температура раствора постоянна, теплом на нагрев воздуха пренебрегаем, теплообмена с окружающей средой нет. Значит, за время τ вся теплота реакции $N\tau$ идёт на испарение ν_2 молей воды при температуре T:

$$N\tau = \lambda\,\nu_2 \quad \Rightarrow \quad \nu_2 = \frac{N\tau}{\lambda}.$$

Раствор отдаёт теплоту на испарение — как раз этот процесс его и охлаждает.

2. Воздух. Воздух подают при P_0, T_0 с расходом q: за τ входит объём $q\tau$. Уравнение Менделеева — Клапейрона для подаваемой порции:

$$P_0\, q\tau = \nu_1 R T_0 \quad \Rightarrow \quad \nu_1 = \frac{P_0\, q\tau}{RT_0}.$$

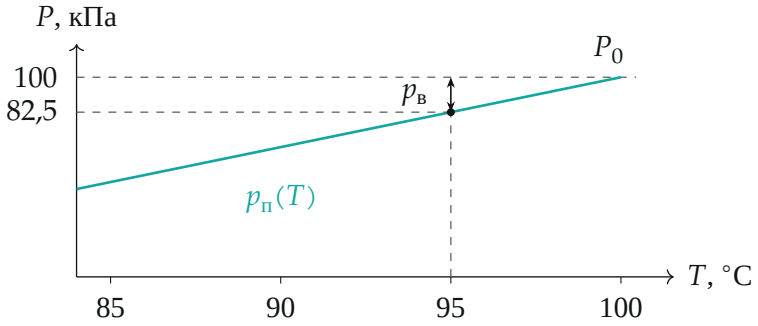
Обратите внимание: q — расход воздуха *на входе*, а не объём смеси на выходе: там газ горячий и с паром, его объём в несколько раз больше.

3. Состав пузырька. Пока пузырёк идёт через раствор, он насыщается: пар в нём становится насыщенным при температуре раствора T. Давление в пузырьке равно давлению над раствором, то есть P_0 (перепад на выходной трубке пренебрежимо мал). Давление насыщенного пара вблизи T_K — прямая с наклоном α, которая при $T = T_K$ даёт P_0 (при T_K раствор кипит, и давление его пара равно атмосферному):

$$p_\text{п} = P_0 - \alpha\,\Delta T.$$

По закону Дальтона давление смеси равно сумме парциальных давлений, поэтому давление воздуха в пузырьке

$$p_\text{в} = P_0 - p_\text{п} = \alpha\,\Delta T.$$

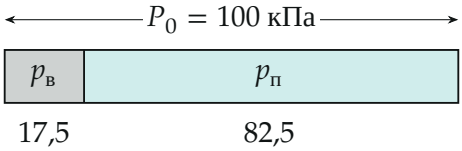


Давление насыщенного пара вблизи T_K: прямая, приходящая в точку (T_K, P_0). При $T = 95\,°C$ пар даёт $p_п = 82{,}5$ кПа, а на воздух из полного давления P_0 остаётся $p_в = 17{,}5$ кПа.

Условие $\Delta T \ll T_K$ нужно, чтобы линейный закон был хорош, а λ можно было считать постоянной.

4. Отношение количеств пара и воздуха. Пузырёк имеет один объём V и одну температуру T для пара и для воздуха. Из уравнения состояния $\nu = pV/(RT)$ следует, что число молей компонента пропорционально его парциальному давлению. Поэтому в пузырьке, а значит, и во всём вышедшем газе

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{p_\text{п}}{p_\text{в}} = \frac{P_0 - \alpha\,\Delta T}{\alpha\,\Delta T}.$$



Состав пузырька при $T = 95\,^\circ$C: парциальные давления, кПа. Молей пара в пузырьке в $82{,}5/17{,}5 \approx 4{,}7$ раза больше, чем молей воздуха.

5. Расход воздуха. Подставим ν_1 и ν_2 из пунктов 1 и 2. Запишем отношение:

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{N\tau/\lambda}{P_0 q\tau/(RT_0)} = \frac{NRT_0}{\lambda P_0 q} = \frac{P_0 - \alpha\,\Delta T}{\alpha\,\Delta T}.$$

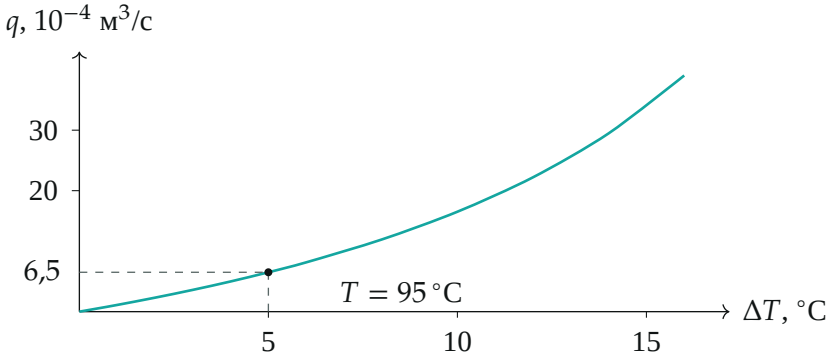
Время τ сократилось — режим действительно установившийся. Неизвестным остался только q:

$$q = \frac{NRT_0\,\alpha\,\Delta T}{\lambda P_0 (P_0 - \alpha\,\Delta T)}.$$

Числа: $\Delta T = 5\,^\circ$C, $\alpha\Delta T = 17{,}5$ кПа, $P_0 - \alpha\Delta T = 82{,}5$ кПа, $T_0 = 295$ К:

$$q = \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 8{,}31 \cdot 295 \cdot 1{,}75 \cdot 10^4}{4 \cdot 10^4 \cdot 10^5 \cdot 8{,}25 \cdot 10^4}\ \text{м}^3/\text{с} \approx 6{,}5 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^3/\text{с}.$$

Это 0,65 л/с, или около 39 л/мин.



Нужный расход воздуха растёт с понижением температуры поддержания. Отмечена точка задачи. При больших ΔT (порядка десятков градусов) линейный закон для p_n уже грубый, и график там показывает лишь тенденцию.

Проверка. Размерность:

$$\frac{\text{Вт}\cdot\text{Дж/моль}\cdot\text{Па}}{\text{Дж/моль}\cdot\text{Па}^2}=\frac{\text{Вт}}{\text{Па}}=\frac{\text{Дж}}{\text{с}\cdot\text{Па}}=\frac{\text{м}^3}{\text{с}},$$

верно.

Предел $T\to T_K$ ($\Delta T\to 0$): $q\to 0$. Раствор уже кипит сам, пар заполняет пузырёк целиком, и воздух для отвода тепла не нужен — так и должно быть.

Численная проверка по цепочке: $\nu_2/\tau = N/\lambda = 0{,}125$ моль/с — это 2,25 г воды в секунду; воздуха на каждый моль пара приходится $17{,}5/82{,}5 = 0{,}212$ моль, то есть $\nu_1/\tau = 0{,}0265$ моль/с, и $q=\nu_1 RT_0/(P_0\tau)=6{,}5\cdot 10^{-4}$ м^3/с — то же число. Объём смеси на выходе (при $T=368$ К и P_0) равен $(\nu_1+\nu_2)RT/(P_0\tau)\approx 4{,}6\cdot 10^{-3}$ м^3/с — в семь раз больше q.

Физический смысл: воздух работает как «переносчик пара». Чем меньше воздуха в пузырьке (чем ближе T к точке кипения), тем больше тепла уносит каждый его моль, и тем меньший расход нужен.

Ответ. $q=\dfrac{NRT_0\,\alpha\,(T_K-T)}{P_0\,\lambda\,(P_0-\alpha\,(T_K-T))}\approx 6{,}5\cdot 10^{-4}$ м^3/с при $T=95\,^\circ$C.