Пластина с шайбой

Задача 3. [ВсОШ 2020/21, 11 класс, задача 3] **Часть 1.** Тонкий стержень из диэлектрика равномерно заряжен с линейной плотностью заряда λ. Точка A расположена на расстоянии h от стержня и равноудалена от его концов. Стержень виден из точки A под углом 2φ (рис. 1). Определите напряжённость электрического поля в точке A.

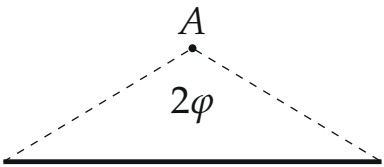


Рис. 1

Часть 2. Тонкая диэлектрическая квадратная пластина с длиной стороны L равномерно заряжена с поверхностной плотностью $\sigma > 0$. В точку A, смещённую в плоскости пластины на малое расстояние $r \ll L$ относительно её центра (т. O) под углом $\alpha = 60°$ к стороне квадрата (рис. 2), помещают маленькую гладкую диэлектрическую шайбу массы m с зарядом $q < 0$. Шайбу отпускают без начальной скорости.

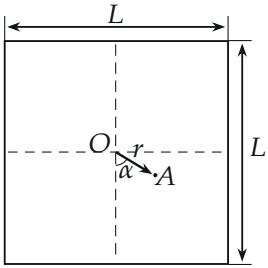


Рис. 2

1. Определите величину и направление ускорения шайбы сразу после того, как её отпустили.
2. Через какое время шайба впервые окажется на минимальном расстоянии от центра пластины?

Силы тяжести нет, пластина закреплена.

▲ **Решение. Что происходит.** В части 1 поле создаёт каждый малый кусочек стержня, поля складываются как векторы; удобная переменная — угол, под которым кусочек виден из A: расстояния тогда сократятся. В части 2 поле пластины считать прямо трудно, но можно хитро: в центре пластины поле равно нулю по симметрии, а при малом смещении остаётся только то, что нарушает симметрию, — две узкие полоски у краёв, то есть тонкие стержни из части 1. Поле окажется пропорциональным смещению: сила упругая, и шайба будет колебаться.

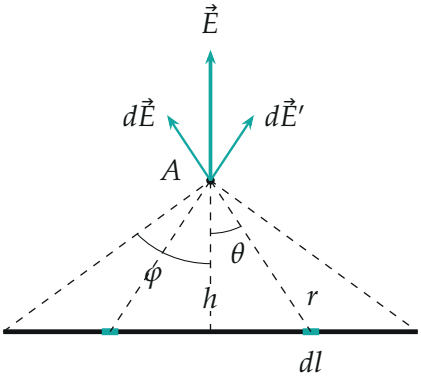
Обозначения. θ — угол между направлением на кусочек стержня и перпендикуляром AO' к стержню (O' — основание перпендикуляра, $AO' = h$); ε_0 — электрическая постоянная.

Часть 1. Поле стержня.

1. Малый кусочек. Рассмотрим малый кусочек стержня длины dl, видимый из A под малым углом $d\theta$ при отклонении θ от перпендикуляра. Расстояние до него $r = h/\cos\theta$. Малый отрезок, перпендикулярный лучу зрения, имел бы длину $r\,d\theta$; наш кусочек лежит наклонно, поэтому $dl\cos\theta = r\,d\theta$, откуда $dl = \dfrac{r\,d\theta}{\cos\theta}$. Заряд кусочка $dq = \lambda\,dl$ считаем точечным. Его поле в A направлено вдоль луча, от кусочка (заряд положителен), и по модулю

$$dE = \frac{\lambda\,dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{d\theta}{r\cos\theta} = \frac{\lambda\,d\theta}{4\pi\varepsilon_0 h}.$$

Здесь $r\cos\theta = h$ — поэтому все расстояния ушли: поле кусочка зависит только от угла $d\theta$.



Поле двух симметричных кусочков стержня ($\pm\theta$): их составляющие вдоль стержня гасятся, составляющие вдоль перпендикуляра складываются. Угол φ — половина угла, под которым виден весь стержень.

2. Симметрия и сумма. Для кусочка под углом $-\theta$ (зеркального) поле $d\vec{E}'$ имеет ту же длину, и составляющие обоих вдоль стержня противоположны — в сумме они гасятся. Остаётся составляющая вдоль перпендикуляра $dE\cos\theta$. Теперь просуммируем по всем кусочкам: угол θ меняется от $-\varphi$ до φ:

$$E = \int_{-\varphi}^{\varphi} \frac{\lambda\cos\theta\, d\theta}{4\pi\varepsilon_0 h} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 h}(\sin\varphi - \sin(-\varphi)) = \frac{\lambda\sin\varphi}{2\pi\varepsilon_0 h}.$$

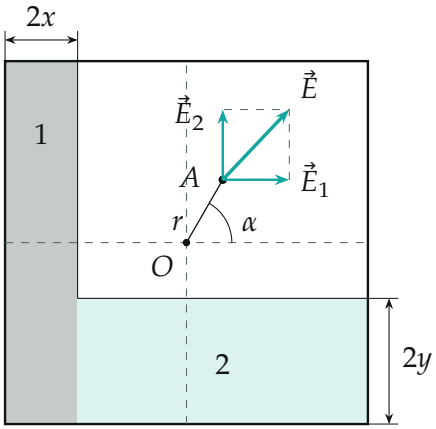
Поле направлено от стержня по перпендикуляру ($\lambda > 0$). *Проверка:* Бесконечный стержень, $\varphi \to \pi/2$: $E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 h}$ — известный ответ. Короткий стержень, $\varphi \to 0$: его заряд $Q = \lambda \cdot 2h\tan\varphi \approx 2h\varphi\lambda$, и формула даёт $E \approx \dfrac{\lambda\varphi}{2\pi\varepsilon_0 h} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 h^2}$ — поле точечного заряда.

Часть 2. Поле пластины и движение шайбы.

3. Что считаем. Оси направим вдоль сторон квадрата, начало — в центре O. Точка A имеет координаты $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$ (обе положительны). В самом центре поле равно нулю: у каждого элемента заряда есть симметричный относительно O, и их поля противоположны.

4. Выбрасываем симметричную часть. Выделим из пластины прямоугольник с центром в A: его правая и верхняя стороны лежат на сторо-

нах пластины, левая — на расстоянии $L/2 - x$ слева от A, нижняя — на расстоянии $L/2 - y$ снизу. Он центрально-симметричен относительно A: у каждого элемента есть парный по другую сторону от A с противоположным полем, и прямоугольник поля в A не создаёт. Остаются две полоски (рисунок): левая шириной $2x$ и нижняя шириной $2y$.



Пластина без прямоугольника, симметричного относительно A: остаются полоска 1 (ширина $2x$) и полоска 2 (ширина $2y$). Их поля $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ взаимно перпендикулярны. Смещение r и ширины полосок на рисунке преувеличены.

5. Поле полосок. Каждая полоска — тонкий стержень длиной примерно L; заряд на единицу длины равен поверхностной плотности, умноженной на ширину: $\lambda_1 = 2x\sigma$, $\lambda_2 = 2y\sigma$. Смещение r мало, поэтому A находится от каждой полоски на расстоянии $h \approx L/2$ и почти против её середины. Стержень виден из A под углом 2φ, причём $\tan\varphi = \dfrac{L/2}{L/2} = 1$, то есть $\varphi = 45°$. По результату части 1

$$E_1 = \frac{\lambda_1 \sin 45°}{2\pi\varepsilon_0\,(L/2)} = \frac{2x\sigma}{\sqrt{2}\,\pi\varepsilon_0 L} = \frac{\sqrt{2}\,\sigma}{\pi\varepsilon_0 L}\,x, \qquad E_2 = \frac{\sqrt{2}\,\sigma}{\pi\varepsilon_0 L}\,y.$$

Полоска 1 лежит слева от A, поэтому $\vec{E}_1$ направлено вправо (по оси x), $\vec{E}_2$ — вверх. Поправки, которые мы отбросили, имеют второй порядок малости по r/L.

6. Полное поле. Сложим векторы E_1 и E_2:

$$\vec{E} = \kappa\,(x,\,y) = \kappa\,\vec{r}, \qquad \kappa = \frac{\sqrt{2}\,\sigma}{\pi\varepsilon_0 L}, \qquad E = \kappa r = \frac{\sqrt{2}\,\sigma r}{\pi\varepsilon_0 L}.$$

Поле направлено вдоль $\vec{r}$, от центра. Обратите внимание: угол $\alpha = 60°$ в ответ не вошёл — x и y входят симметрично, поле радиально и одинаково по модулю при любом направлении смещения.

Пункт 1. Ускорение сразу после отпускания. На шайбу действует только сила $\vec{F} = q\vec{E}$. Заряд $q < 0$, поэтому сила противоположна полю, то есть направлена к центру O вдоль AO. Запишем второй закон Ньютона для шайбы:

$$ma = |q|E \quad \Rightarrow \quad a = \frac{|q|\,\kappa\,r}{m} = \frac{\sqrt{2}\,\sigma|q|\,r}{\pi\varepsilon_0 mL}.$$

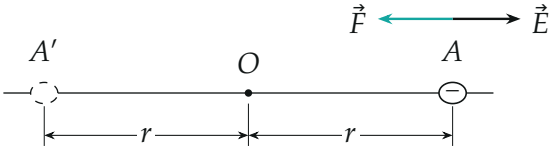
Пункт 2. Время до центра. Сила $|q|E = |q|\kappa s$ при смещении s от центра всегда направлена к O, начальная скорость равна нулю, поэтому шайба движется по прямой AO. Пусть s — координата вдоль этой прямой от O (в начале $s = r$). Второй закон Ньютона:

$$m\ddot{s} = -|q|\kappa\,s \quad \Rightarrow \quad \ddot{s} = -\omega^2 s, \qquad \omega^2 = \frac{|q|\kappa}{m} = \frac{\sqrt{2}\,\sigma|q|}{\pi\varepsilon_0 mL}.$$

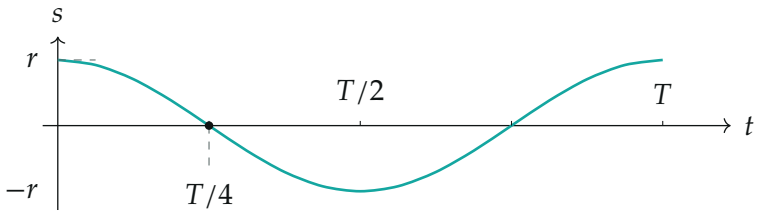
Это гармонические колебания: сила пропорциональна смещению и направлена к центру. При $s(0) = r$ и нулевой начальной скорости $s(t) = r\cos\omega t$. Минимальное расстояние от центра — ноль, и шайба впервые попадёт в центр, когда $\omega t = \pi/2$, то есть через четверть периода $T = 2\pi/\omega$:

$$t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\pi\varepsilon_0 mL}{\sqrt{2}\,\sigma|q|}} = \sqrt{\frac{\pi^3\varepsilon_0 mL}{4\sqrt{2}\,\sigma|q|}}.$$

Обратите внимание: время не зависит ни от r, ни от α; линейная формула поля верна на всём движении, так как шайба не уходит дальше r от центра.



Шайба ($q < 0$) отпущена в точке A: поле $\vec{E}$ направлено от центра, сила $\vec{F} = q\vec{E}$ — к центру. Она проходит центр и останавливается в симметричной точке A'.



Координата шайбы вдоль AO в зависимости от времени: $s = r\cos\omega t$. В центре ($s = 0$) шайба в момент $T/4$.

Проверка. Размерность: σ/ε_0 — напряжённость E, $|q|E$ — сила, поэтому $a = |q|E\,(r/L)/m$ — ускорение, а $\sqrt{\varepsilon_0 mL/(\sigma|q|)} = \sqrt{mL/(|q|E)} = \sqrt{\text{кг}\cdot\text{м}/\text{Н}} = \text{с}$.

Поле пластины проверено численно по точной формуле для поля прямоугольника: при $r = 10^{-3}L \ldots 3\cdot 10^{-2}L$ и углах от $0°$ до $80°$ получено $E = \sqrt{2}\sigma r/(\pi\varepsilon_0 L)$ с точностью 0,1%, направление вдоль $\vec{r}$.

Физический смысл: у центра пластины поле в её плоскости направлено от центра и линейно по смещению. Для отрицательного заряда это упругая сила — шайба колеблется; положительную поле бы выталкивало (равновесие неустойчиво).

Ответ. Часть 1: $E = \dfrac{\lambda \sin\varphi}{2\pi\varepsilon_0 h}$.

Часть 2: 1) $a = \dfrac{\sqrt{2}\,\sigma|q|\,r}{\pi\varepsilon_0 mL}$, направлено к центру O вдоль AO; 2) $t = \dfrac{T}{4} = \sqrt{\dfrac{\pi^3\varepsilon_0 mL}{4\sqrt{2}\,\sigma|q|}}$.