Виток в витке

Задача 4. [ВсОШ 2020/21, 11 класс, задача 4] Индуктивность кольца радиуса R, сделанного из тонкой проволоки, равна L.

1. Найдите индуктивность проволочного кольца, у которого все геометрические размеры в 2 раза больше.

Если в плоскости кольца радиуса R поместить сверхпроводящее колечко с вдвое меньшими геометрическими размерами так, чтобы плоскости колец и их центры совпадали (рис. 3), то индуктивность кольца радиуса R оказывается равной L_1.

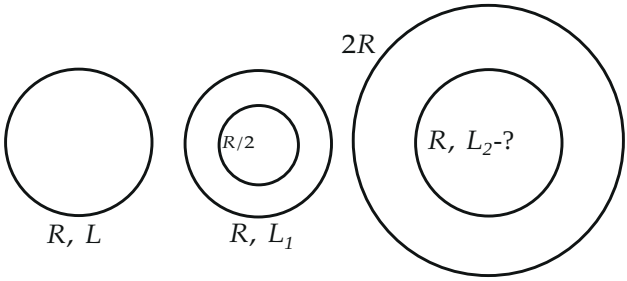


Рис. 3

2. Какой станет индуктивность кольца L_2 радиуса R при помещении его внутрь сверхпроводящего кольца со вдвое большими геометрическими размерами? Плоскости и центры колец во втором случае также совпадают.

▲ **Решение. Что происходит.** Индуктивность L — коэффициент в $\Phi = LI$: полный магнитный поток через кольцо при токе I. Для пункта 1 главная идея — подобие: при увеличении всех размеров в k раз поле уменьшается в k раз, а площадь растёт в k^2 раз. В пункте 2 рядом с кольцом оказывается сверхпроводник. Поток через замкнутый сверхпроводящий контур измениться не может (в нём нет сопротивления, ЭДС индукции мгновенно гасится током), а был он нулевым, поэтому ток I в обычном кольце наводит в сверхпроводящем кольце ток I_s такой, что поток через него остаётся нулевым. Поле тока I_s пронизывает обычное

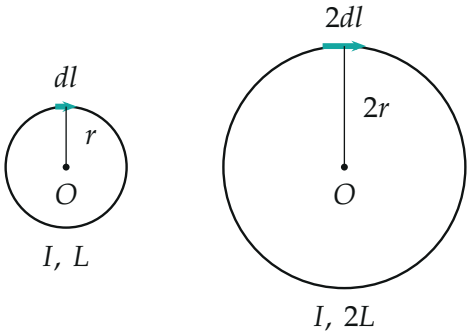
кольцо и меняет поток через него при том же I, то есть его индуктивность. Это задача про два контура: потоки через каждый записываем через индуктивности и взаимную индуктивность.

Обозначения. I — ток в обычном кольце радиуса R; I_s — ток в сверхпроводящем кольце; M — взаимная индуктивность колец радиусов R и $R/2$ (общий центр, одна плоскость): поток через одно кольцо при токе I в другом равен MI. Это число одно и то же в обе стороны: $M_{12} = M_{21}$ (теорема взаимности).

Пункт 1. Подобие. Увеличим кольцо в k раз, оставив ток I. Каждый малый элемент тока $I\,dl$ вырастает в k раз, а расстояния до любой точки — тоже в k раз. По закону Био — Савара $dB \propto I\,dl/r^2$ изменение поля от элемента — в $k/k^2 = 1/k$ раз; значит, в соответствующих точках индукция в k раз *меньше*. Площадь кольца выросла в k^2 раз, поэтому поток

$$\Phi' = \frac{B}{k}\cdot k^2 S = k\,\Phi, \qquad \text{и} \qquad L' = \frac{\Phi'}{I} = kL.$$

Для $k = 2$ индуктивность кольца радиуса $2R$ равна $2L$. Это же верно для любых других размеров и для взаимной индуктивности двух колец: если увеличить в k раз обе части системы, индуктивность M тоже вырастет в k раз. Запомним: индуктивности кольца $R/2$ и $2R$ равны $L/2$ и $2L$, а пара колец R и $2R$ получена из пары $R/2$ и R увеличением в 2 раза, значит, её взаимная индуктивность равна $2M$.



Подобие: кольцо в 2 раза больше. Расстояния $r \to 2r$, элемент тока $I\,dl \to 2I\,dl$, поле элемента $\propto I\,dl/r^2$ уменьшается вдвое, а площадь растёт вчетверо. Поэтому поток, а с ним и индуктивность, вырастают вдвое.

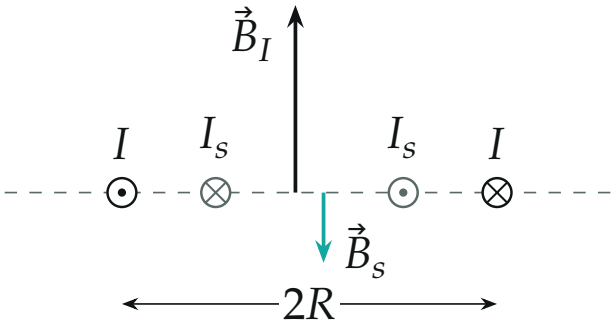
Пункт 2, шаг 1. Сверхпроводящее колечко внутри: выражаем L_1 через L и M. Запишем поток через каждое из двух колец при токах I и I_s; в каждый вклад даёт свой ток (через индуктивность) и чужой (через M). Через сверхпроводящее колечко (его индуктивность $L/2$):

$$\Phi_s = M\,I + \frac{L}{2}\,I_s = 0 \quad \Rightarrow \quad I_s = -\frac{2M}{L}\,I.$$

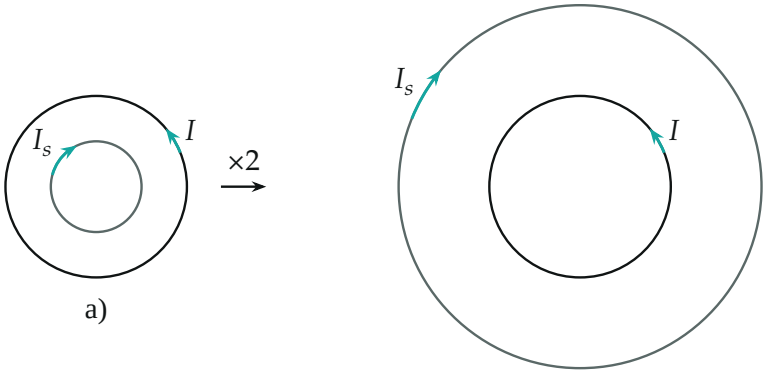
Минус означает, что ток в колечке течёт навстречу току I: поле колечка гасит поле внешнего кольца. Через обычное кольцо радиуса R поток равен

$$\Phi = L\,I + M\,I_s = \Big(L - \frac{2M^2}{L}\Big)I \quad \Rightarrow \quad L_1 = L - \frac{2M^2}{L}.$$

Обратите внимание: здесь важно, что взаимная индуктивность одна и та же в обе стороны: поток через кольцо R от тока I_s равен MI_s, как и поток через колечко от тока I.



Разрез плоскостью, перпендикулярной кольцам (случай а). Ток I (чёрные кружки) создаёт в центре поле $\vec{B}_I$ вверх; наведённый ток $I_s = -0{,}19\,I$ в сверхпроводящем колечке (серые кружки) течёт навстречу и создаёт поле $\vec{B}_s$ вниз, в центре $|B_s| \approx 0{,}37\,B_I$ (длины стрелок в этом отношении, $M/L = 0{,}093$ для проволоки толщины $R/100$). Внутри колечка поля частично гасятся так, что полный поток через колечко равен нулю.



Два случая: а) кольцо R с током I и сверхпроводящее колечко $R/2$ внутри; б) кольцо R внутри сверхпроводящего кольца $2R$. Серым — сверхпроводящее кольцо, стрелки — токи. Ток в сверхпроводнике I_s направлен против тока I. Система б) — увеличенная вдвое система а), но ролями наоборот: сверхпроводник теперь снаружи.

Пункт 2, шаг 2. Сверхпроводящее кольцо снаружи: находим L_2. Теперь сверхпроводящее кольцо имеет радиус $2R$: по пункту 1 его индуктивность $2L$, а взаимная индуктивность с кольцом R равна $2M$. Условие нулевого потока через сверхпроводящее кольцо:

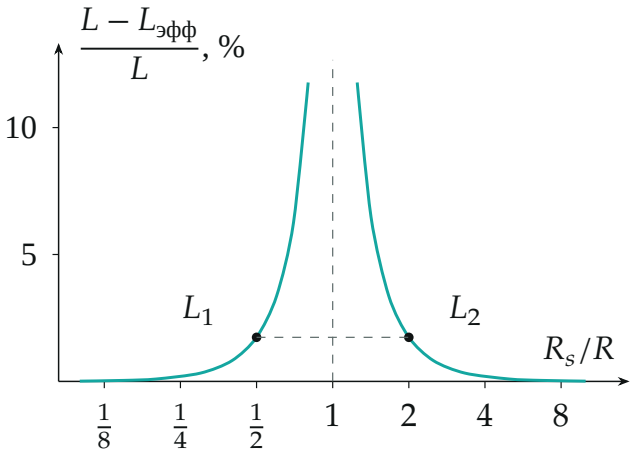
$$\Phi_s = 2M\,I + 2L\,I_s = 0 \quad \Rightarrow \quad I_s = -\frac{M}{L}\,I,$$

и поток через обычное кольцо

$$\Phi = L\,I + 2M\,I_s = \Big(L - \frac{2M^2}{L}\Big)I \quad \Rightarrow \quad L_2 = L - \frac{2M^2}{L} = L_1.$$

Второй способ — в общем виде. Для обычного кольца с самоиндуктивностью L рядом со сверхпроводящим контуром индуктивности L_s и взаимной индуктивностью M_{12} те же два уравнения дают $L_{\text{эфф}} = L - M_{12}^2/L_s$. В случае 1: $M_{12}^2/L_s = M^2/(L/2) = 2M^2/L$; в случае 2: $(2M)^2/(2L) = 2M^2/L$. Числитель во втором случае вырос в 4 раза ($M \to 2M$), и знаменатель — тоже в 4 раза ($L/2 \to 2L$), поэтому поправка одинакова.

Проверка. Размерность: M^2/L — генри, как и L. Предельные случаи: сверхпроводящее кольцо очень маленькое ($M \propto R_s^2$, $L_s \propto R_s$, поправка $M^2/L_s \propto R_s^3 \to 0$) или очень большое ($M \propto 1/R_s$, $M^2/L_s \propto R_s^{-3} \to 0$) — индуктивность не меняется, $L_{\text{эфф}} \to L$, как и должно быть. Поправка отрицательна ($M^2 > 0$): индуцированный ток направлен против основного, и поток через кольцо уменьшается.



Насколько падает индуктивность кольца R рядом с концентрическим сверхпроводящим кольцом радиуса R_s (численный расчёт для проволоки толщины $R/100$ и подобной ей у второго кольца; шкала по R_s/R логарифмическая). Кривая симметрична: $R_s = R/k$ и $R_s = kR$ дают одно и то же, точки задачи — 1,74 % в обоих случаях. Вблизи $R_s = R$ кольца почти касаются, там расчёт тонких колец неприменим. Вдали от $R_s = R$ поправка стремится к нулю.

Дополнительно рассчитано числом: для колец из проволоки радиуса $R/100$ по точным формулам (через полные эллиптические интегралы) $M/L = 0{,}0932$, $L_1/L = L_2/L = 0{,}9826$, формула $1 - 2(M/L)^2 = 0{,}9826$ — верна; индуктивность кольца $2R$ действительно ровно $2L$.

Физический смысл: сверхпроводник «не пускает» в себя изменение потока, и поэтому индуктивность соседнего обычного кольца немного падает — и на столько же, помещён ли сверхпроводник внутрь или вокруг него в таком же масштабе.

Ответ. 1) $2L$; 2) $L_2 = L_1\ (= L - 2M^2/L)$.