Прозрачный слой

Задача 5. [ВсОШ 2020/21, 11 класс, задача 5] В шаре радиуса $2R$ из оптически прозрачного материала имеется сферическая полость радиуса R. Центры шара и полости совпадают. Внутри полости воздух. Из воздуха снаружи на поверхность шара падает луч света (рис. 4). При каких значениях угла падения луча на поверхность шара α луч проникнет внутрь полости? Рассмотрите два случая:

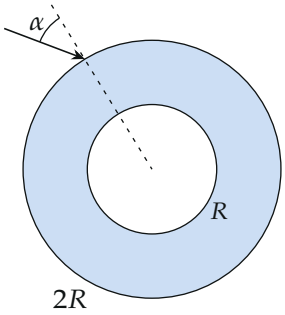


Рис. 4

1. Показатель преломления вещества шара постоянен и равен $n = 2$.
2. Показатель преломления вещества шара линейно уменьшается при увеличении расстояния r от центра: $n(r) = 2{,}5 - 0{,}5\,\dfrac{r}{R}$, $R \le r \le 2R$. Показатель преломления воздуха считать равным $n_0 = 1$.

▲ **Решение. Что происходит.** Луч входит в шар, идёт по веществу и подходит к поверхности полости. Попасть в воздух полости ему мешает только полное внутреннее отражение: из вещества с показателем n в воздух луч выходит, если $n \sin\varphi \le 1$, где φ — угол падения на поверхность полости. Значит, задача сводится к одному вопросу: чему равен угол φ на поверхности полости, если угол падения на шар равен α. В первом случае связь даёт теорема синусов для треугольника с вершиной в центре, во втором — величина $n\,r\sin\theta$, которая сохраняется вдоль луча в среде со сферической симметрией.

Обозначения. O — центр, A — точка входа луча в шар, B — точка, где он подходит к полости; β — угол преломления в A, φ — угол падения в B (от радиусов-нормалей).

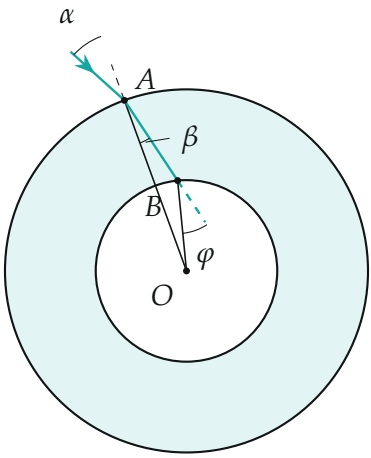
Случай 1. Показатель преломления $n = 2$.

1. Преломление на шаре. Закон преломления в точке A (воздух → вещество) даёт $\sin\alpha = n\sin\beta$, то есть $\sin\beta = \dfrac{\sin\alpha}{2}$.

2. Угол падения на полость. Рассмотрим треугольник OAB (рисунок): $OA = 2R$, $OB = R$. Угол при вершине A равен β (между лучом и радиусом AO). Угол при вершине B равен $180^\circ - \varphi$, потому что φ — угол между продолжением луча за B и радиусом BO. Применим теорему синусов к сторонам OA и OB и противолежащим им углам:

$$\frac{OA}{\sin(180^\circ - \varphi)} = \frac{OB}{\sin\beta} \quad\Rightarrow\quad \frac{2R}{\sin\varphi} = \frac{R}{\sin\beta} \quad\Rightarrow\quad \sin\varphi = 2\sin\beta.$$

Подставим $\sin\beta = \frac{1}{2}\sin\alpha$ из пункта 1: $\sin\varphi = \sin\alpha$. Для $n = 2$ угол падения на полость *равен* углу падения на шар: $\varphi = \alpha$.



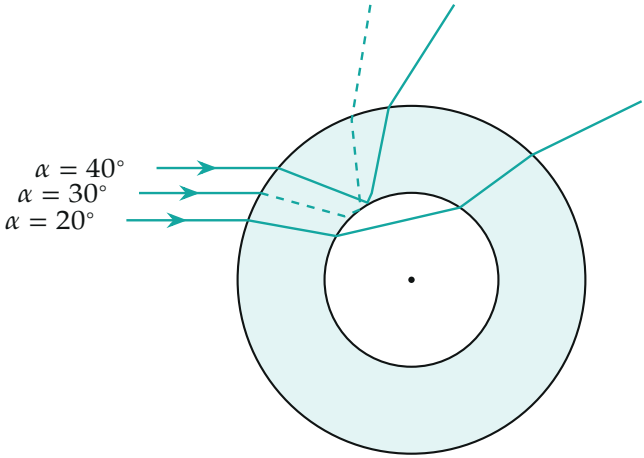
Треугольник OAB для луча с $\alpha = 28^\circ$ ($n = 2$): $\beta = 13{,}6^\circ$, $\varphi = 28^\circ$. Пунктиром показаны продолжение радиуса за A и продолжение луча за B.

3. Достигнет ли луч полости. Расстояние от центра O до прямой AB равно $2R\sin\beta = R\sin\alpha$ и не превосходит R при любом α, поэтому луч всегда доходит до поверхности полости.

4. Условие выхода в полость. Из вещества в воздух на поверхности полости луч выходит, если $n \sin\varphi \le 1$ (иначе — полное внутреннее отражение, и луч, отразившись, уходит обратно). Подставим $n = 2$ и $\varphi = \alpha$: $2\sin\alpha < 1$, то есть

$$\sin\alpha < \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha < 30^\circ.$$

При $\alpha = 30^\circ$ луч скользит вдоль поверхности полости, внутрь не попадает.



Ход трёх лучей при $n = 2$ (расчёт по закону преломления): $\alpha = 20^\circ$ — луч проходит полость; $\alpha = 30^\circ$ — луч скользит вдоль полости; $\alpha = 40^\circ$ — на границе полости полное внутреннее отражение, луч возвращается в вещество и выходит наружу.

Случай 2. Показатель преломления $n(r) = 2{,}5 - 0{,}5\,r/R$.

5. Что сохраняется вдоль луча. Разобьём шар на тонкие сферические слои, внутри каждого n постоянен, и луч прямой. Пусть θ — угол между лучом и радиусом, p — расстояние от центра до прямой, на которой лежит луч. В треугольнике из центра и двух точек хорды $p = r\sin\theta$, и внутри слоя $r\sin\theta$ не меняется. На границе двух слоёв радиус r один и тот же, а закон преломления даёт $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$, то есть $n\,r\sin\theta$

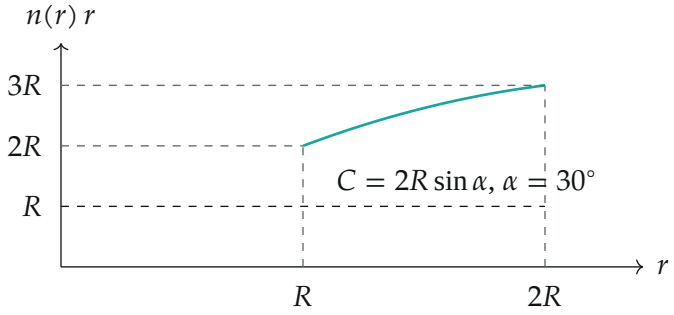
непрерывно. Уменьшая толщину слоёв, получаем: вдоль всего луча

$$n(r)\, r \sin\theta = \text{const} = C.$$

В воздухе $n = 1$, луч прямой, и $C = p$ — расстояние от центра до прямой, на которой луч подходит к шару. На внешней поверхности $r = 2R$, и из воздуха угол падения равен α, значит

$$C = 1 \cdot 2R \sin\alpha = 2R \sin\alpha.$$

6. Дойдёт ли луч до полости. Луч мог бы повернуть назад там, где $\sin\theta = 1$, то есть $n(r)\, r = C$. Функция $f(r) = n(r)\, r = 2{,}5\, r - 0{,}5\, r^2/R$ имеет производную $f' = 2{,}5 - r/R > 0$ на $R \le r \le 2R$, поэтому она возрастает от $f(R) = 2R$ до $f(2R) = 3R$. Значит, во всём слое $f(r) \ge 2R \ge C$, равенство возможно лишь при $\alpha = 90°$. Поворота нет, и луч доходит до полости при любом $\alpha < 90°$.



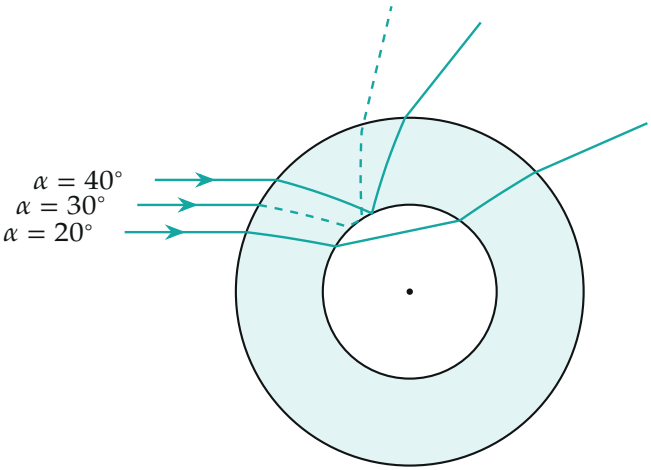
Функция $n(r)\, r$ на слое $R \le r \le 2R$ возрастает от $2R$ до $3R$ и лежит выше любого уровня $C = 2R \sin\alpha < 2R$: поворота луча нет. Пунктиром показан уровень для $\alpha = 30°$ ($C = R$).

7. Угол падения на полость. На поверхности полости $r = R$, $n(R) = 2$, поэтому

$$2 \cdot R \sin\varphi = C = 2R \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \sin\varphi = \sin\alpha, \qquad \varphi = \alpha.$$

Как и в первом случае, угол падения на полость равен углу падения на шар.

8. Условие выхода в полость. Из среды с $n(R) = 2$ в воздух луч выходит, если $n(R)\sin\varphi \le 1$: $2\sin\alpha < 1$, то есть $\alpha < 30°$. Короче: в воздухе полости луч прямой, и он зайдёт в неё, только если пройдёт от центра на расстоянии $p = C$ меньше радиуса полости: $2R\sin\alpha < R$.



Те же три угла падения для $n(r) = 2{,}5 - 0{,}5\,r/R$: в веществе лучи искривлены, а граничный угол прежний, 30°. Расчёт по уравнению луча в неоднородной среде.

Проверка. Угол $\varphi = \alpha$ в обоих случаях не случаен: в любой сферически-симметричной среде $n\,r\sin\theta = \text{const}$, а в воздухе полости эта константа — расстояние от центра до луча, поэтому луч попадает в полость, если $2R\sin\alpha < R$, и результат не зависит от вида $n(r)$, пока луч не поворачивает назад. Случай 1 — частный случай общего: вещество шара лишь искривляет луч по пути.

Численно: ход лучей рассчитан по закону преломления (для $n(r)$ — по уравнению луча в неоднородной среде, шаг $2{\cdot}10^{-3}R$). При $\alpha = 29{,}9°$ луч входит в полость ($n\sin\varphi = 0{,}997$), при $\alpha = 30{,}1°$ отражается ($n\sin\varphi = 1{,}003$) — в обоих случаях, и $\varphi = \alpha$ с точностью 0,02°.

Ответ. 1) $\alpha < 30°$; 2) $\alpha < 30°$ (в обоих случаях $\varphi = \alpha$; при $\alpha \ge 30°$ луч отражается от полости).