По цепи кругом

Задача Е1. [ВсОШ 2020/21, заключительный этап, 9 класс, практический тур, задача Е1] «По цепи кругом».

I часть.

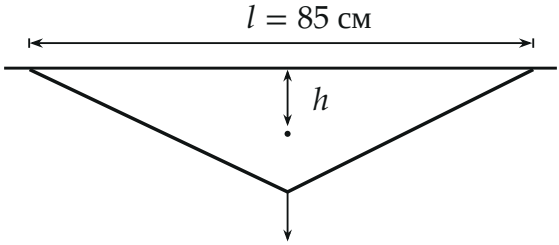
1. Определите массу m цепочки.
2. Подвесьте цепочку на двух зубочистках, закреплённых на крышке стола, так, чтобы точки подвеса находились на одном уровне. Снимите зависимость угла α между цепочкой у точек крепления и горизонтом от расстояния l между точками подвеса (см. рисунок). Измерения проведите для диапазона значений l от 0 до 90 см.
3. Постройте график (формат А5) зависимости горизонтальной составляющей T_x силы натяжения цепочки в точке крепления от l.
4. Определите, какую минимальную работу A нужно совершить, чтобы увеличить расстояние между точками подвеса цепочки от 0 до 50 см.



II часть.

Для фиксированного расстояния между точками крепления $l = 85$ см определите:

5. Силу натяжения цепочки в нижней точке.
6. Расстояние $h_ц$ по высоте от центра тяжести цепочки до уровня точек подвеса.
7. Расстояние h по высоте от центра тяжести цепочки до уровня точек подвеса, если цепочку натянуть, потянув вниз за середину, как показано на рисунке.



Примечание: цепочку можно считать однородной и нерастяжимой. В данной работе расчёт погрешности не требуется. $g = 10$ м/с^2.

Оборудование: цепочка, транспортир, мерная лента, лист бумаги формата А4 с поверхностной плотностью $\sigma = 80$ г/м^2, миллиметровая бумага для построения графиков, две зубочистки и клейкая масса для их крепления.

▲ **Решение. Что происходит.** Это статика гибкой нити под действием собственного веса. Весов нет, поэтому массу цепочки находим сравнением с листом бумаги известной массы на рычаге (правило моментов). Сила натяжения у точки подвеса направлена по касательной к цепочке, а её вертикальная составляющая держит ровно половину веса — значит, угол α сразу даёт горизонтальную составляющую T_x. Работа по раздвиганию точек подвеса — площадь под графиком $T_x(l)$, и она же идёт на подъём центра тяжести цепочки.

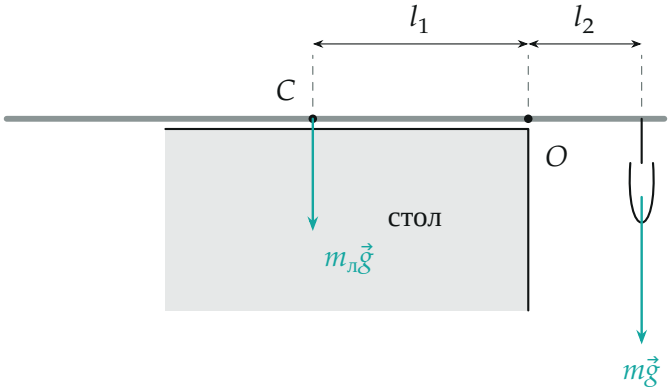
Обозначения. m — масса цепочки, $L = 1{,}0$ м — её длина (мерная лента), $m_л$ — масса листа, T — сила натяжения в точке подвеса, T_x, T_y — её горизонтальная и вертикальная составляющие, T_0 — натяжение в нижней точке.

Пункт 1. Масса цепочки.

1. Масса листа. Площадь листа А4 $S = 29{,}7 \cdot 21{,}0$ см^2 $= 624$ см^2, масса $m_л = \sigma S = 80$ г/м$^2 \cdot 0{,}0624$ м$^2 = 5{,}0$ г.

2. Рычаг. Сворачиваем лист в жёсткую трубку и кладём на край стола; ищем положение равновесия — так находим центр тяжести листа C (середина трубки). Затем подвешиваем цепочку на конец трубки и снова ищем точку опоры O, при которой трубка в равновесии. Правило моментов относительно O (сила реакции стола момента не даёт):

$$m_л g\, l_1 = mg\, l_2 \quad \Longrightarrow \quad m = \frac{l_1}{l_2}\, m_л = \frac{91\text{ мм}}{48\text{ мм}} \cdot 5{,}0\text{ г} \approx 9{,}5\text{ г}.$$



Рычаг из свёрнутого листа на краю стола, $l_1 = 91$ мм, $l_2 = 48$ мм (отношение плеч на рисунке — в масштабе).

Пункт 2. Зависимость $\alpha(l)$. Измерения организаторов (транспортир у точки подвеса, мерная лента; при $l > 60$ см угол меняется быстрее, там шаг мельче):

l, см	0	10	20	30	40	50	55
α, °	90	88	86	84	81	76	73
ctg α	0	0,035	0,070	0,105	0,158	0,249	0,306
T_x, мН	0	1,7	3,3	5,0	7,5	11,8	14,5

l, см	60	65	70	75	80	85	90
α, °	70	67	64	60	55	48	37
ctg α	0,364	0,424	0,488	0,577	0,700	0,900	1,33
T_x, мН	17,3	20,2	23,2	27,4	33,3	42,8	63,0

Пункт 3. Горизонтальная составляющая натяжения.

3. Вертикальная составляющая. Условие равновесия всей цепочки в проекции на вертикаль: две точки подвеса держат вес mg, и по симметрии поровну:

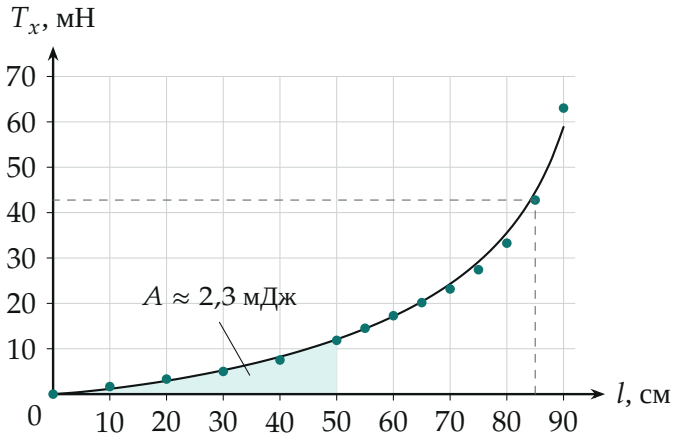
$$2T_y = mg \quad \Longrightarrow \quad T_y = \frac{mg}{2} = 47{,}5 \text{ мН}.$$

4. Горизонтальная составляющая. Нить гибкая, поэтому сила натя-

жения направлена по касательной к цепочке — под углом α к горизонту: $T_y/T_x = \operatorname{tg}\alpha$,

$$T_x = \frac{mg}{2}\operatorname{ctg}\alpha.$$

Значения — в последней строке таблицы, график — ниже.



Пункт 3: $T_x(l)$ — точки по таблице и сглаживающая кривая. Закрашенная площадь — работа пункта 4.

Пункт 4. Минимальная работа.

5. Работа как площадь. Раздвигаем точки подвеса медленно (так работа минимальна: кинетическая энергия не нужна), сдвигая одну из них на dl. Внешняя сила уравновешивает горизонтальную составляющую натяжения, её работа $dA = T_x\,dl$. Сумма по всему пути — площадь под графиком $T_x(l)$:

$$A = \int_0^{50\text{ см}} T_x\,dl \approx 2{,}3\text{ мДж}$$

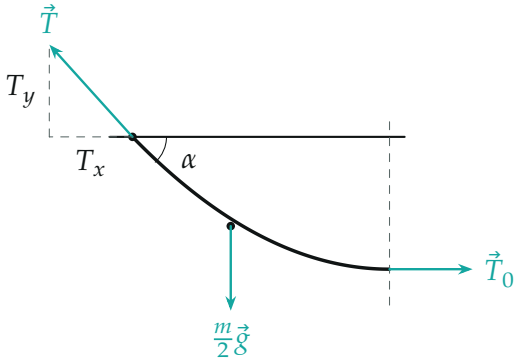
(по трапециям между точками таблицы: 2,34 мДж).

Пункт 5. Натяжение в нижней точке при $l = 85$ см.

6. Равновесие половины цепочки. Мысленно разрезаем цепочку в нижней точке. На левую половину действуют: сила натяжения в точке подвеса $\vec{T}$ (по касательной, вверх-влево), вес $\frac{m}{2}\vec{g}$ и сила натяжения со

стороны правой половины $\vec{T}_0$ — в нижней точке касательная горизонтальна, значит, $\vec{T}_0$ горизонтальна. Условие равновесия в проекции на горизонталь:

$$T_0 - T_x = 0 \quad \Longrightarrow \quad T_0 = T_x(85\text{ см}) = \frac{mg}{2}\operatorname{ctg} 48^\circ \approx 42\text{ мН}.$$



Пункт 5: силы, действующие на левую половину цепочки; $\vec{T}_0$ в нижней точке горизонтальна.

Пункт 6. Центр тяжести при $l = 85$ см.

7. Работа идёт в потенциальную энергию. Раздвигаем точки подвеса медленно, кинетической энергии нет, трения нет — закон сохранения энергии: вся работа внешней силы идёт на увеличение потенциальной энергии цепочки, $A_{\text{внеш}} = mg\,\Delta h$, где Δh — подъём центра тяжести.

8. Начальное положение. При $l = 0$ ($\alpha = 90^\circ$) цепочка висит двумя вертикальными половинами длиной $L/2$; центр тяжести каждой — посередине, на глубине $L/4 = 25$ см.

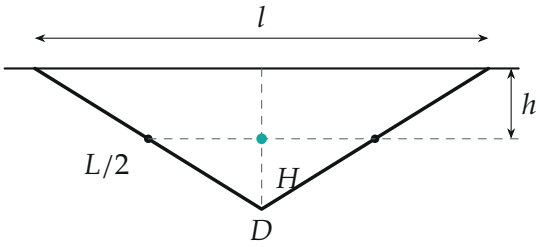
9. Подсчёт. Площадь под графиком от 0 до 85 см: $A_{\text{внеш}} \approx 10{,}5$ мДж. Тогда

$$h_{\text{ц}} = \frac{L}{4} - \frac{A_{\text{внеш}}}{mg} = 0{,}25\text{ м} - \frac{10{,}5 \cdot 10^{-3}\text{ Дж}}{0{,}095\text{ Н}} \approx 0{,}14\text{ м} = 14\text{ см}.$$

Пункт 7. Цепочка, натянутая за середину.

10. Геометрия. Цепочка нерастяжима, натянутые половины — прямые отрезки длиной $L/2$; вместе с отрезком между точками подвеса они образуют равнобедренный треугольник. Высота по теореме Пифагора $H = \sqrt{(L/2)^2 - (l/2)^2}$. Центр тяжести каждой однородной половины — в её середине, на глубине $H/2$:

$$h = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{0{,}50^2 - 0{,}425^2}\ \text{м} \approx 0{,}13\ \text{м} = 13\ \text{см}.$$



Пункт 7: центр тяжести (бирюзовая точка) — посередине между центрами половин, на половине высоты H.

Обратите внимание. Вертикальная составляющая $T_y = mg/2$ не зависит от l — меняется только горизонтальная. Поэтому при $\alpha \to 0$ (цепочку натягивают почти в прямую) T_x растёт неограниченно, отсюда резкий подъём графика у $l = 90$ см.

Ответ: $m \approx 9{,}5$ г; $A \approx 2{,}3$ мДж; $T_0 = \dfrac{mg}{2}\operatorname{ctg}\alpha \approx 42$ мН; $h_\text{ц} = \dfrac{L}{4} - \dfrac{A_\text{внеш}}{mg} \approx 14$ см; $h = \dfrac{1}{2}\sqrt{(L/2)^2 - (l/2)^2} \approx 13$ см.

Проверка. Свисающая цепочка не может иметь центр тяжести выше натянутой: под действием тяжести она сама принимает форму с наименьшей потенциальной энергией, поэтому $h_\text{ц} > h$: 14 см > 13 см — выполнено. Второй способ для T_x: формула цепной линии для $L = 1$ м, $l = 85$ см даёт $T_x \approx 40$ мН и $h_\text{ц} \approx 15$ см — в пределах точности измерения угла транспортиром (1° при $\alpha = 48°$ меняет T_x на 2 мН).

Смысл: угол у точки подвеса — это весь «силомер», а площадь под графиком силы — энергия, которая выдаёт высоту центра тяжести без всяких формул цепной линии.

Ответ. 1) $m \approx 9{,}5$ г; 4) $A \approx 2{,}3$ мДж; 5) $T_0 \approx 42$ мН; 6) $h_{\text{ц}} \approx 14$ см; 7) $h \approx 13$ см.