WOT

Задача 2. [ВсОШ 2020/21, заключительный этап, 9 класс, задача 2] «WOT».

Небольшой игрушечный танк поместили на наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтом (рис. 1). За какое минимальное время τ танк, двигаясь с постоянной скоростью, сможет проехать по окружности радиуса R? Чему будет равен максимальный угол γ между векторами силы трения и ускорения танка во время этого движения? Коэффициент трения между гусеницами и плоскостью равен μ. Ускорение свободного падения g.

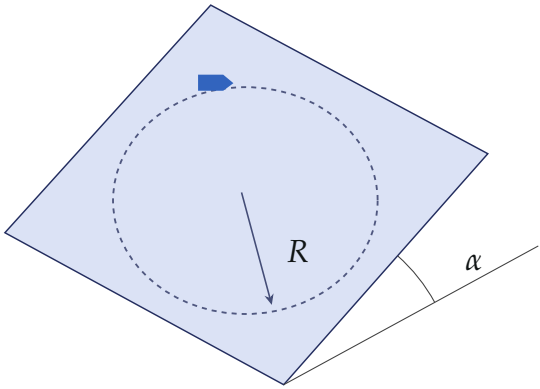
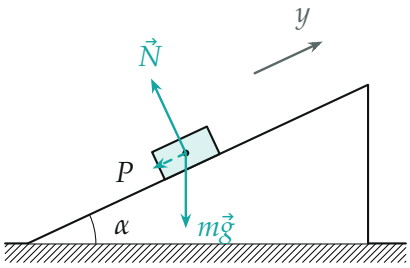


Рис. 1

▲ **Решение. Что происходит.** Это динамика движения по окружности с трением покоя. Танк едет по окружности с постоянной по модулю скоростью, поэтому его ускорение $\vec{a}$ — центростремительное, $a = v^2/R$, и всё время лежит в наклонной плоскости. Разгоняет, тормозит и поворачивает танк только трение покоя гусениц о плоскость: именно оно вместе со «скатывающей» составляющей силы тяжести создаёт ускорение. Трение покоя не может превышать μN; самое трудное место окружности — то, где требуемая сила трения наибольшая. Это и ограничивает скорость.

Обозначения. m — масса танка, v — его скорость, N — сила нормальной реакции, $\vec{F}_{\text{тр}}$ — сила трения покоя. В плоскости движения: ось

y — вверх по склону (по линии наибольшего наклона), ось x — горизонтально. $P = mg\sin\alpha$ — модуль составляющей силы тяжести вдоль склона, она направлена вниз по склону.



Вид сбоку: $N = mg\cos\alpha$, вдоль склона вниз действует $P = mg\sin\alpha$.

Пункт 1. Минимальное время.

1. Перпендикулярно плоскости. Второй закон Ньютона в проекции на нормаль к плоскости (ускорения вдоль нормали нет): $N - mg\cos\alpha = 0$, так что $N = mg\cos\alpha$, а предел трения покоя

$$F_{\text{тр}} \leq \mu N = \mu mg\cos\alpha.$$

2. В плоскости движения. Второй закон Ньютона для танка (векторно, в плоскости склона): $m\vec{a} = \vec{F}_{\text{тр}} + m\vec{g}_{\parallel}$, где $m\vec{g}_{\parallel}$ — составляющая силы тяжести вдоль склона, $|m\vec{g}_{\parallel}| = P$. Отсюда сила трения, которую должна обеспечить плоскость:

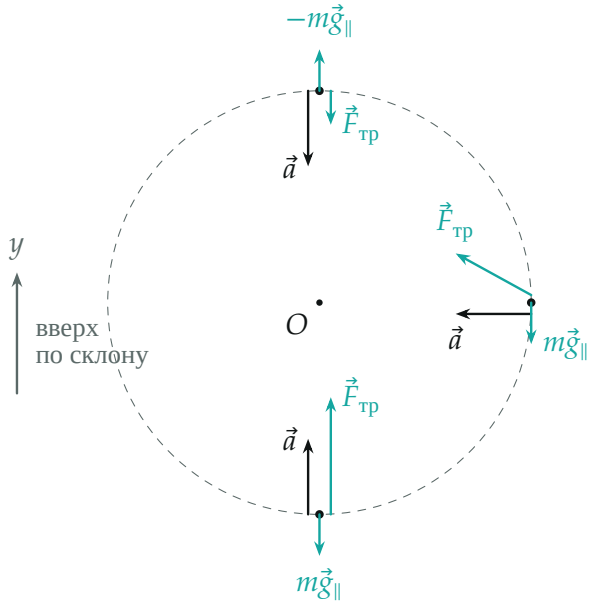
$$\vec{F}_{\text{тр}} = m\vec{a} - m\vec{g}_{\parallel}.$$

Модуль $m\vec{a}$ постоянен ($ma = mv^2/R$), меняется только направление — к центру окружности. Вектор $-m\vec{g}_{\parallel}$ всё время один и тот же: модуль P, направление вверх по склону.

3. Где трение наибольшее. Модуль суммы двух векторов $m\vec{a}$ и $-m\vec{g}_{\parallel}$ наибольший, когда они сонаправлены: ускорение направлено вверх по склону. Это *нижняя* точка окружности (центр выше танка). Там в проекции на ось y

$$F_{\text{тр}} = \frac{mv^2}{R} + mg\sin\alpha.$$

В верхней точке, наоборот, $F_{\text{тр}} = |mv^2/R - mg\sin\alpha|$ — там легче всего.



Вид на склон сверху (перпендикулярно плоскости), $\mu > 2\operatorname{tg}\alpha$: $\vec{F}_{тр} = m\vec{a} - m\vec{g}_{\parallel}$ в трёх точках окружности (в верхней показан вектор $-m\vec{g}_{\parallel}$, вверх). Длины — в масштабе; в нижней точке трение наибольшее.

4. Предельная скорость. Танк проедет всю окружность без проскальзывания, если трение покоя справится в нижней точке:

$$\frac{mv^2}{R} + mg\sin\alpha \le \mu mg\cos\alpha \quad \Longrightarrow \quad v \le v_{\max} = \sqrt{gR(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)}.$$

Время одного круга при постоянной скорости $\tau = 2\pi R/v$, наименьшее — при $v_{\max}$:

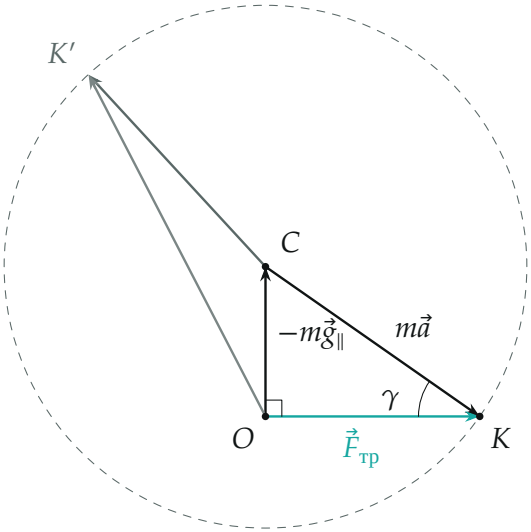
$$\tau_{\min} = \frac{2\pi R}{v_{\max}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)}}.$$

Это возможно только при $\mu\cos\alpha > \sin\alpha$, то есть $\mu > \operatorname{tg}\alpha$: иначе танк соскальзывает, даже стоя на месте.

Пункт 2. Наибольший угол между $\vec{F}_{\text{тр}}$ и $\vec{a}$.

5. Векторная диаграмма. Танк едет с $v_{\max}$, поэтому $ma = \mu mg\cos\alpha - mg\sin\alpha$. Отложим из точки O постоянный вектор $-m\vec{g}_{\parallel}$ (длина P, вверх

по склону) в точку C, а из C — вектор $m\vec{a}$ (длина ma). Конец K вектора $m\vec{a}$ при объезде окружности пробегает окружность радиуса ma с центром C, а сила трения — это вектор $\overrightarrow{OK}$. Угол γ между $\vec{F}_{\text{тр}} = \overrightarrow{OK}$ и $m\vec{a} = \overrightarrow{CK}$ — угол OKC треугольника OKC.



Концы вектора $\vec{F}_{тр}$ лежат на окружности радиуса ma с центром C; угол γ наибольший, когда $\vec{F}_{тр} \perp \overrightarrow{OC}$ (точка K); серым — произвольное положение K'. Масштаб $\alpha = 20°$, $\mu = 1$.

6. Случай $P < ma$, то есть $\mu > 2\operatorname{tg}\alpha$. Точка O внутри окружности. Теорема синусов для треугольника OKC:

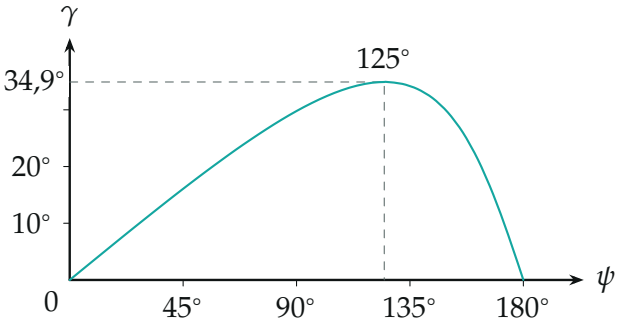
$$\frac{OC}{\sin\gamma} = \frac{CK}{\sin\angle KOC} \quad\Longrightarrow\quad \sin\gamma = \frac{P}{ma}\sin\angle KOC.$$

Отношение P/ma одно и то же во всех точках, поэтому γ наибольший при $\sin\angle KOC = 1$: сила трения перпендикулярна линии склона, то есть горизонтальна. Тогда

$$\sin\gamma_{\max} = \frac{P}{ma} = \frac{mg\sin\alpha}{\mu mg\cos\alpha - mg\sin\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\mu - \operatorname{tg}\alpha}.$$

Танк в этот момент в верхней половине окружности: ускорение имеет составляющую вниз по склону.

7. Случай $P \geq ma$, то есть $\operatorname{tg}\alpha < \mu \leq 2\operatorname{tg}\alpha$. Точка O вне окружности (или на ней). В верхней точке $m\vec{a}$ направлено вниз по склону, а $\vec{F}_{\text{тр}} = m\vec{a} - m\vec{g}_{\parallel}$ — вверх по склону (или обращается в ноль при $P = ma$): сила трения противоположна ускорению, $\gamma_{\max} = 180°$.



Угол γ между $\vec{F}_{тр}$ и $\vec{a}$ в зависимости от положения танка (ψ — угол от нижней точки окружности), $\alpha = 20°$, $\mu = 1$, $v = v_{\max}$. Посчитано по $\operatorname{tg}\gamma = \dfrac{P\sin\psi}{ma + P\cos\psi}$*; максимум* $\sin\gamma = P/(ma) = 0{,}572$ *при* $\cos\psi = -P/(ma)$.

Обратите внимание. Сила трения здесь — не «против движения»: она поворачивает танк и удерживает его на склоне, её направление в каждой точке своё. Ограничивает скорость нижняя точка, а не боковые и не верхняя.

Ответ:

$$\tau_{\min} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)}} \quad (\mu > \operatorname{tg}\alpha);$$

$$\sin\gamma_{\max} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\mu - \operatorname{tg}\alpha} \quad (\mu > 2\operatorname{tg}\alpha), \qquad \gamma_{\max} = 180° \quad (\mu \leq 2\operatorname{tg}\alpha).$$

Проверка. Размерность: $\sqrt{R/g}$ — секунды. Предел $\alpha = 0$ (горизонтальный стол): $\tau_{\min} = 2\pi\sqrt{R/(\mu g)}$, известное $v_{\max} = \sqrt{\mu g R}$, и $\gamma_{\max} = 0$ — трение направлено точно к центру. При $\mu \to \operatorname{tg}\alpha$ время уходит в бесконечность: танк едва держится на склоне и разогнаться не может. На

границе $\mu = 2\,\mathrm{tg}\,\alpha$ формула даёт $\sin\gamma = 1$, $\gamma = 90°$, а дальше угол скачком переходит к $180°$ — в верхней точке трение обращается в ноль и меняет направление.

Смысл: склон «добавляет» к нужной силе трения постоянный вектор $mg\sin\alpha$ вверх по склону; самое трудное место — низ окружности, а наибольший угол между трением и ускорением — там, где трение горизонтально.

Ответ. $\tau_{\min} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\mu\cos\alpha - \sin\alpha}}\sqrt{\dfrac{R}{g}}$ (при $\mu > \mathrm{tg}\,\alpha$); $\sin\gamma_{\max} = \dfrac{\sin\alpha}{\mu\cos\alpha - \sin\alpha} = \dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\mu - \mathrm{tg}\,\alpha}$ при $\mu > 2\,\mathrm{tg}\,\alpha$; при $\mathrm{tg}\,\alpha < \mu \leq 2\,\mathrm{tg}\,\alpha$ $\gamma_{\max} = 180°$.