С отливом

Задача 3. [ВсОШ 2020/21, заключительный этап, 9 класс, задача 3] «С отливом».

В пустой стакан с отводной трубкой и вертикальными стенками начали наливать с небольшим массовым расходом μ горячую воду при температуре $t_1 = 90\,^\circ\text{C}$. За время τ уровень воды в стакане поднялся на высоту h (рис. 2). Через время 3τ после начала заполнения стакана в бак, расположенный под отводной трубкой, из другого крана стала поступать с массовым расходом 2μ холодная вода при температуре $t_2 = 20\,^\circ\text{C}$.

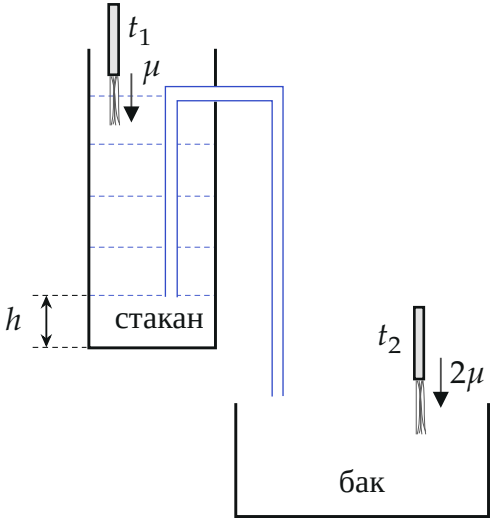


Рис. 2

1. Постройте график зависимости температуры воды в баке от времени для интервала от 3τ до 10τ от начала заполнения стакана.
2. Найдите, какая температура установится в баке через большое время?
3. Какого максимального значения достигала температура в баке?

Перетекание по отводной трубке и теплообмен в системе происходят очень быстро. Тепловыми потерями и теплоёмкостями сосудов и трубки можно пренебречь. Объём отводной трубки мал. Вода из бака не выливается.

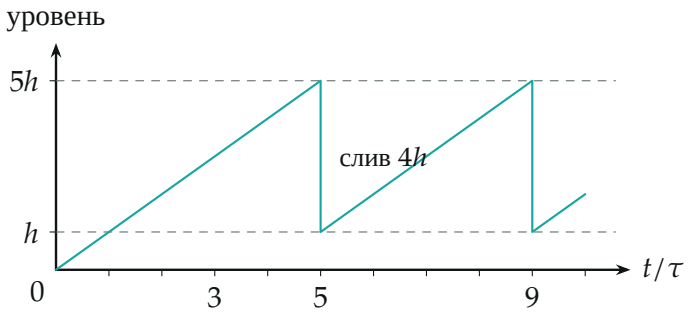
▲ **Решение. Что происходит.** Задача на тепловой баланс при смешивании, но сначала — на гидростатику: стакан с изогнутой трубкой — это сифон. Пока уровень воды ниже верхнего колена трубки, вода в бак не идёт. Как только уровень доходит до колена (на рисунке это высота $5h$), трубка заполняется и сифон быстро сливает воду до нижнего конца трубки (высота h). Поэтому горячая вода приходит в бак порциями, а холодная — непрерывно. После каждой порции температура в баке скачком растёт, а между порциями плавно падает.

Обозначения. c — удельная теплоёмкость воды; $M_г$ и $M_х$ — массы горячей и холодной воды, попавшие в бак к данному моменту; T — температура в баке. Время отсчитываем от начала заполнения стакана.

1. Как работает сифон. За время τ в стакан приходит масса $\mu\tau$ и уровень растёт на h. До колена трубки (высота $5h$) вода дойдёт к моменту 5τ. Сифон сливает воду, пока над нижним концом трубки есть вода, — до высоты h; уходит слой $4h$, то есть масса

$$m_0 = 4\mu\tau.$$

Снова дойти до $5h$ уровень сможет через 4τ. Порции горячей воды падают в бак в моменты 5τ, 9τ, 13τ, ... — с периодом 4τ.



Уровень воды в стакане: рост со скоростью h/τ, мгновенный слив от $5h$ до h в моменты 5τ и 9τ.

2. Тепловой баланс смеси. Теплообмен быстрый, потерь нет, поэтому уравнение теплового баланса для всей воды в баке — горячей $M_г$ и

холодной $M_\text{х}$:

$$cM_\text{г}(T-t_1)+cM_\text{х}(T-t_2)=0 \quad\Longrightarrow\quad T=\frac{M_\text{г}t_1+M_\text{х}t_2}{M_\text{г}+M_\text{х}}.$$

Холодной воды к моменту $t>3\tau$ пришло $M_\text{х}=2\mu(t-3\tau)$, горячей — $4\mu\tau$ на каждую случившуюся порцию.

3. Интервал 3τ–5τ**.** Горячей воды в баке нет, $T=t_2=20\,^\circ\text{C}$.

4. Первая порция, $t=5\tau$**.** $M_\text{г}=4\mu\tau$, $M_\text{х}=2\mu\cdot2\tau=4\mu\tau$ — поровну:

$$T_1=\frac{t_1+t_2}{2}=55\,^\circ\text{C}.$$

5. Интервал 5τ–9τ**.** Горячей воды $4\mu\tau$, холодной $2\mu(t-3\tau)$:

$$T(t)=\frac{4\tau\,t_1+2(t-3\tau)\,t_2}{4\tau+2(t-3\tau)}=\frac{2\tau\,t_1+(t-3\tau)\,t_2}{t-\tau}.$$

Это не прямая, а гипербола: температура падает всё медленнее. Перед второй порцией ($t=9\tau$, холодной $12\mu\tau$)

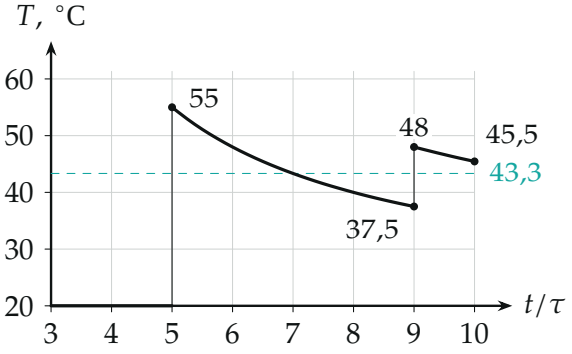
$$T_2=\frac{t_1+3t_2}{4}=37{,}5\,^\circ\text{C}.$$

6. Вторая порция, $t=9\tau$**.** Горячей $8\mu\tau$, холодной $12\mu\tau$:

$$T_3=\frac{2t_1+3t_2}{5}=48\,^\circ\text{C}.$$

7. Интервал 9τ–10τ**.** Горячей $8\mu\tau$, к 10τ холодной $14\mu\tau$:

$$T_4=\frac{4t_1+7t_2}{11}\approx45{,}5\,^\circ\text{C}.$$



Пункт 1: температура в баке. Скачки — приход порций горячей воды, между ними — участки гипербол (точки посчитаны по формуле шага 5); пунктир — предел 43,3 °C.

Пункт 2. Через большое время. За каждый период 4τ в бак приходит $4\mu\tau$ горячей и $2\mu \cdot 4\tau = 8\mu\tau$ холодной воды — в отношении $1:2$. Когда воды накопилось много, вклад начального неравенства (первые 2τ холодной без горячей) и колебания внутри периода (одна порция на всё растущую массу) становятся сколь угодно малыми, и температура стремится к температуре смеси 1 : 2:

$$T_\infty = \frac{t_1 + 2t_2}{3} \approx 43{,}3\,^\circ\text{C}.$$

Пункт 3. Максимум. Сразу после n-й порции горячей воды $4n\mu\tau$, холодной $(8(n-1)+4)\mu\tau$:

$$T_n^{\max} = \frac{n\,t_1 + (2n-1)\,t_2}{3n-1} = T_\infty + \frac{t_1 - t_2}{3(3n-1)}.$$

Это убывает с ростом n, наибольшее значение — при $n = 1$: $T_{\max} = 55\,^\circ\text{C}$ (сразу после первой порции).

Обратите внимание. Сифон сливает не всю воду: она уходит до нижнего конца трубки, в стакане остаётся слой h. Поэтому первая порция приходит в момент 5τ, а каждая порция — $4\mu\tau$, а не $5\mu\tau$.

Ответ: 1) график на рисунке: 20 °C до 5τ, скачок до 55 °C, спад по гиперболе до 37,5 °C к 9τ, скачок до 48 °C, к 10τ — 45,5 °C; 2) $T_\infty =$

$\dfrac{t_1 + 2t_2}{3} \approx 43{,}3\,^\circ\text{C}$; 3) $T_{\max} = \dfrac{t_1 + t_2}{2} = 55\,^\circ\text{C}$.

Проверка. Все температуры лежат между t_2 и t_1, как и должно быть при смешивании. Формула пункта 3 при $n \to \infty$ даёт T_∞ — ответы пунктов 2 и 3 согласованы. Второй способ для T_3: смешать бак $T_2 = 37{,}5\,^\circ\text{C}$ (масса $16\mu\tau$) с порцией $4\mu\tau$ при $90\,^\circ\text{C}$: $(16 \cdot 37{,}5 + 4 \cdot 90)/20 = 48\,^\circ\text{C}$ — совпало.

Смысл: сифон превращает ровный поток горячей воды в порции, и температура в баке «пилит», но среднее соотношение 1 : 2 определяет предел.

Ответ. 1) график в решении ($55\,^\circ\text{C}$ при 5τ, $37{,}5\,^\circ\text{C}$ перед 9τ, $48\,^\circ\text{C}$ после 9τ, $\approx 45{,}5\,^\circ\text{C}$ при 10τ, спады — по гиперболе); 2) $T_\infty \approx 43{,}3\,^\circ\text{C}$; 3) $T_{\max} = 55\,^\circ\text{C}$.