Ареометры

Задача 4. [ВсОШ 2020/21, заключительный этап, 9 класс, задача 4] «Ареометры».

В лаборатории экспериментатора Глюка было два одинаковых ареометра. Когда один из них Глюк погрузил в сосуд с исследуемой жидкостью, прибор сначала показал значение 1,027 г/см^3. Затем его показания стали изменяться, но через продолжительное время он вновь стал показывать 1,027 г/см^3. Убедившись, что изменений показаний больше нет, Глюк погрузил в сосуд второй прибор (не вынимая первого) и снова стал ждать. Теперь показания приборов установились на значении 1,022 г/см^3. Какова начальная температура ареометров в лаборатории Глюка? Зависимость плотности жидкости от её температуры изображена на рисунке 3. Теплоёмкости жидкости и приборов можно считать постоянными. Теплообмена с внешней средой нет.

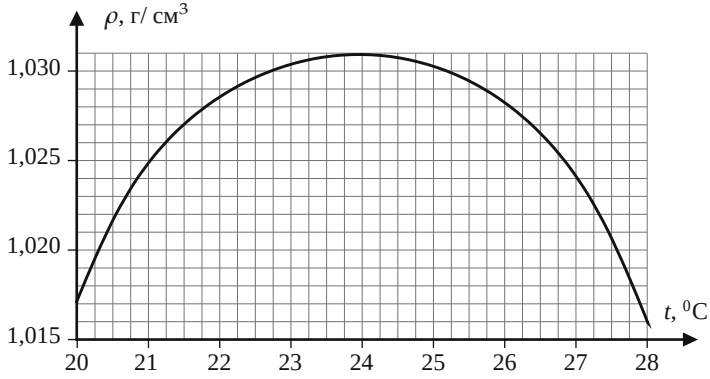


Рис. 3

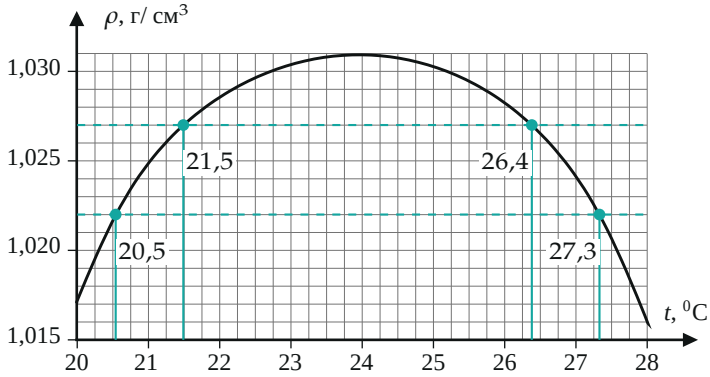
▲ **Решение.** **Что происходит.** Задача на тепловой баланс, а ареометр здесь — одновременно термометр: он показывает плотность жидкости, а по графику плотность переводится в температуру. Главная зацепка — график немонотонный, с максимумом при 24 °C. Показание 1,027 вернулось к прежнему значению, хотя жидкость за это время нагрелась или остыла. Это возможно, только если температура жидкости перешла через максимум плотности: одно и то же значение 1,027 соответствует

двум температурам по разные стороны от 24 °C. Какая из них начальная — заранее неизвестно, поэтому случаев два.

Обозначения. $C_ж$ — теплоёмкость жидкости, C_a — теплоёмкость одного ареометра, t_0 — начальная температура ареометров (искомая), $t_н$ — начальная температура жидкости, t_1 — температура после первого ареометра, t_2 — после второго.

1. Температуры по графику. Проводим горизонтали $\rho = 1{,}027$ и $\rho = 1{,}022$ г/см^3 и снимаем температуры точек пересечения (по мелкой сетке, с точностью около 0,05 °C; второй знак после запятой — оценка внутри клетки):

$\rho = 1{,}027$: 21,49 °C и 26,38 °C; $\rho = 1{,}022$: 20,54 °C и 27,33 °C.



Отсчёт по графику: каждому показанию ареометра соответствуют две температуры.

2. Уравнение теплового баланса. Теплообмена с внешней средой нет, теплоёмкости постоянны, поэтому сумма $C\,\Delta t$ по всем телам равна нулю. Для первого ареометра и жидкости:

$$C_ж(t_1 - t_н) + C_a(t_1 - t_0) = 0.$$

Для всего процесса целиком (оба ареометра от t_0 до t_2, жидкость от $t_н$

до t_2) — то же самое, от начального состояния сразу к конечному:

$$C_{\text{ж}}(t_2 - t_{\text{н}}) + 2C_{\text{а}}(t_2 - t_0) = 0.$$

Делим одно на другое, $C_{\text{ж}}$ и $C_{\text{а}}$ сокращаются:

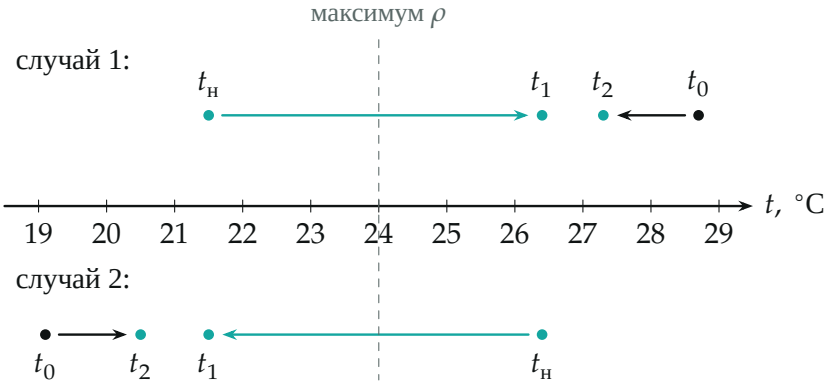
$$\frac{t_1 - t_{\text{н}}}{t_2 - t_{\text{н}}} = \frac{t_0 - t_1}{2(t_0 - t_2)} \quad \Longrightarrow \quad t_0 = \frac{2k\,t_2 - t_1}{2k - 1}, \qquad k = \frac{t_1 - t_{\text{н}}}{t_2 - t_{\text{н}}}.$$

3. Случай 1: ареометры горячее жидкости. Жидкость нагревается: $t_{\text{н}} = 21{,}49\,^\circ\text{C} \to t_1 = 26{,}38\,^\circ\text{C}$. Второй ареометр тоже горячее, жидкость греется дальше, и из двух температур с $\rho = 1{,}022$ подходит только $t_2 = 27{,}33\,^\circ\text{C}$ (вернуться к $20{,}54\,^\circ\text{C}$, нагреваясь, нельзя).

$$k = \frac{26{,}38 - 21{,}49}{27{,}33 - 21{,}49} = 0{,}837, \qquad t_0 = \frac{2 \cdot 0{,}837 \cdot 27{,}33 - 26{,}38}{2 \cdot 0{,}837 - 1} \approx 28{,}7\,^\circ\text{C}.$$

4. Случай 2: ареометры холоднее жидкости. Жидкость остывает: $t_{\text{н}} = 26{,}38\,^\circ\text{C} \to t_1 = 21{,}49\,^\circ\text{C}$, затем ещё ниже: $t_2 = 20{,}54\,^\circ\text{C}$.

$$k = \frac{21{,}49 - 26{,}38}{20{,}54 - 26{,}38} = 0{,}837, \qquad t_0 = \frac{2 \cdot 0{,}837 \cdot 20{,}54 - 21{,}49}{2 \cdot 0{,}837 - 1} \approx 19{,}1\,^\circ\text{C}.$$



Два возможных сценария на шкале температур: бирюзой — жидкость, чёрным — ареометры. В обоих жидкость проходит через максимум плотности

(24 °C).

5. Оба ли случая возможны. В обоих случаях отношение теплоёмкостей одинаково и положительно: $C_ж/C_а = (t_0 - t_1)/(t_1 - t_н) \approx 0{,}48$ — противоречий нет. Различить случаи по условию нельзя, поэтому ответов два.

Обратите внимание. Ответ очень чувствителен к отсчёту по графику: сдвиг любой из температур на 0,05 °C меняет t_0 на $\pm 0{,}3$ °C. Поэтому отсчитывать нужно аккуратно, по мелкой сетке.

Ответ: $t_0 = \dfrac{2k\,t_2 - t_1}{2k - 1}$, $k = \dfrac{t_1 - t_н}{t_2 - t_н}$; $t_0 \approx 28{,}7$ °C (ареометры были горячее жидкости) или $t_0 \approx 19{,}1$ °C (холоднее). У организаторов отсчёты округлены до 0,1 °C и ответ 19 °C — в пределах точности графика это то же самое.

Проверка. Размерность: k безразмерно, t_0 — в градусах. Знаки: в случае 1 $t_0 > t_2 > t_1$ — ареометры отдают тепло и остывают, жидкость нагревается; в случае 2 $t_0 < t_2 < t_1$ — наоборот. Предел: если бы ареометр был бесконечно «тяжёлым» по теплоёмкости ($C_а \gg C_ж$), то уже после первого жидкость приняла бы его температуру, $t_1 = t_2 = t_0$; у нас $t_2 - t_1 = 0{,}9$ °C, и t_0 лишь немного дальше t_2 — согласуется с $C_ж/C_а \approx 0{,}5$.

Смысл: немонотонный график превращает ареометр в «двусмысленный» термометр, отсюда два ответа.

Ответ. $t_0 \approx 28{,}7$ °C или $t_0 \approx 19$ °C.