Авометрия

Задача 5. [ВсОШ 2020/21, заключительный этап, 9 класс, задача 5] «Авометрия».

По известным показаниям вольтметра V_1 и амперметра A_1 ($U_1 = 1$ В, $I_1 = 6$ мкА) определите показания остальных приборов в электрической цепи, схема которой приведена на рисунке 4. Все вольтметры одинаковые, и их сопротивления гораздо больше сопротивлений амперметров.

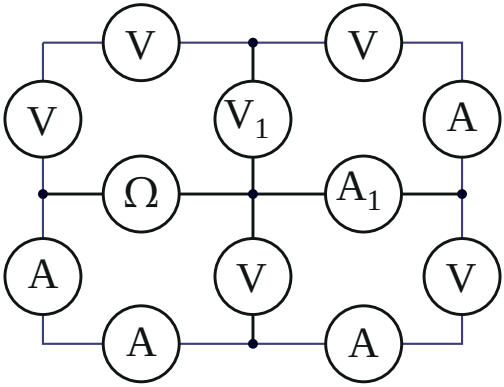
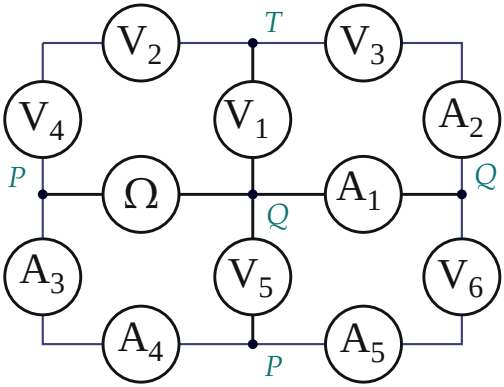


Рис. 4

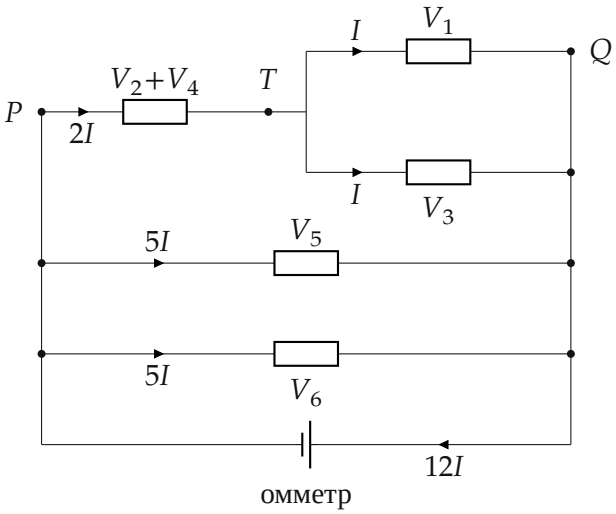
▲ **Решение. Что происходит.** Задача на расчёт цепи постоянного тока с измерительными приборами. Единственный источник в цепи — омметр: внутри у него батарейка, и он показывает сопротивление внешней цепи, к которой подключён. Амперметры по сравнению с вольтметрами — просто провода, поэтому многие точки цепи сливаются в один узел. Вольтметры одинаковые — это одинаковые резисторы R_V, а их показания пропорциональны токам через них.

Обозначения. Нумеруем приборы, как на рисунке ниже; R_V — сопротивление вольтметра; I — ток через V_1. Узлы, соединённые только амперметрами, обозначены одной буквой: P (левый узел и нижний средний — их соединяют A_3 и A_4), Q (центр и правый узел — их соединяет A_1), T — верхний средний узел.



Нумерация приборов и узлы: точки с одной буквой соединены амперметрами и имеют одинаковый потенциал.

1. Эквивалентная схема. Закон Ома для амперметра: напряжение на нём $I_A R_A \ll I_A R_V$, то есть пренебрежимо мало, — амперметр заменяем перемычкой. Вольтметры V_2, V_4 (через угол без узла) соединены последовательно между P и T; V_1 и пара $V_3 + A_2$ — обе между T и Q; V_5 и пара $V_6 + A_5$ — обе между P и Q; омметр — между P и Q.



Эквивалентная схема: вольтметры — резисторы R_V, амперметры — провода. Направление обхода выбрано условно (полярность омметра на ответ не влияет).

2. Ток через V_1 и R_V. V_1 и V_3 подключены к одним и тем же узлам T и Q (через A_2, у которого нет напряжения), значит, напряжения на них равны: $U_3 = U_1 = 1$ В. Одинаковые сопротивления — одинаковые токи: по I через каждый.

3. Ветвь P–T. Первое правило Кирхгофа для узла T: втекает ток через V_2 и V_4, вытекает $I + I$. Значит, через последовательные V_2 и V_4 идёт $2I$, и по закону Ома

$$U_2 = U_4 = 2IR_V = 2U_1 = 2 \text{ В}.$$

4. Напряжение между P и Q. Второе правило Кирхгофа по пути $P \to T \to Q$:

$$U_{PQ} = U_2 + U_4 + U_1 = 2 + 2 + 1 = 5 \text{ В}.$$

Вольтметры V_5 и V_6 подключены прямо к P и Q: $U_5 = U_6 = 5$ В, ток через каждый — $5I$.

5. Токи через амперметры. Первое правило Кирхгофа для правого узла (по ту сторону A_1): в него приходят ток I по A_2 и ток $5I$ по V_6 и A_5, а уходят они только через A_1:

$$I_{A_1} = I + 5I = 6I.$$

По условию $I_{A_1} = 6$ мкА, откуда $I = 1$ мкА и $R_V = U_1/I = 1$ МОм.

Для центрального узла: приходят I (по V_1), $5I$ (по V_5) и $6I$ (по A_1) — через омметр идёт $12I = 12$ мкА. Для левого узла: от омметра приходят $12I$, по V_4 уходят $2I$, остальное $10I$ — через A_3 и A_4 к нижнему узлу, где делится поровну между V_5 и V_6 (по $5I$).

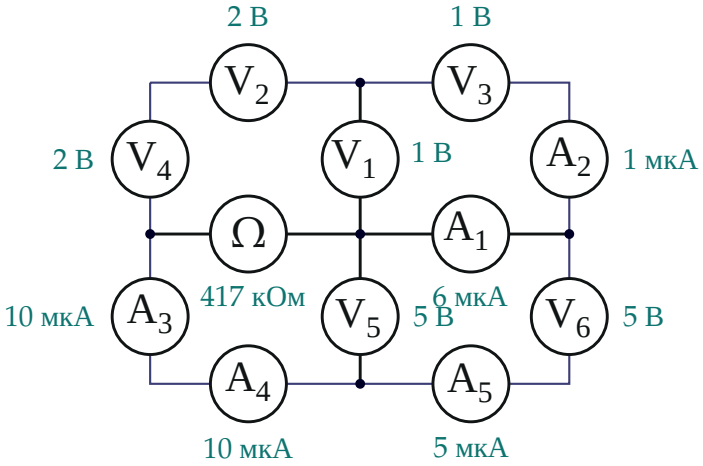
V_2	V_3	V_4	V_5	V_6
2 В	1 В	2 В	5 В	5 В
A_2	A_3	A_4	A_5	Ω
1 мкА	10 мкА	10 мкА	5 мкА	417 кОм

6. Показание омметра. Омметр показывает сопротивление внешней

цепи между P и Q — отношение напряжения на ней к току через омметр:

$$R = \frac{U_{PQ}}{12I} = \frac{5\text{ В}}{12\text{ мкА}} \approx 417\text{ кОм}.$$

Второй способ — сложить сопротивления по эквивалентной схеме: $(2R_V + \frac{R_V}{2}) \parallel R_V \parallel R_V$, то есть $\frac{1}{R} = \frac{1}{2{,}5R_V} + \frac{2}{R_V} = \frac{2{,}4}{R_V}$, $R = \frac{5}{12}R_V \approx 417$ кОм — совпало.



Показания всех приборов.

Обратите внимание. Омметр в цепи — не измеритель «где-то сбоку», а единственный источник тока; без него все приборы показывали бы ноль.

Ответ: $U_2 = U_4 = 2$ В, $U_3 = 1$ В, $U_5 = U_6 = 5$ В; $I_{A_2} = 1$ мкА, $I_{A_3} = I_{A_4} = 10$ мкА, $I_{A_5} = 5$ мкА; омметр $R = \frac{5}{12}R_V = \frac{5}{12} \cdot \frac{6U_1}{I_1} \approx 417$ кОм.

Проверка. Баланс токов в нижнем узле: приходит $10I$, уходит $5I + 5I$ — сходится. Размерность R: В/А = Ом. Мощность, отдаваемая омметром, 5 В · 12 мкА = 60 мкВт, равна сумме U^2/R_V по вольтметрам: $(4 + 4 + 1 + 1 + 25 + 25) \cdot 1$ мкВт = 60 мкВт.

Смысл: заменив амперметры проводами, получаем цепь из пяти одинаковых резисторов, и всё следует из двух правил Кирхгофа.

Ответ. Вольтметры: 2 В, 1 В, 2 В, 5 В, 5 В; амперметры: 1 мкА, 10 мкА, 10 мкА, 5 мкА (расположение — на рисунке в решении); омметр: $R = \dfrac{5\text{ В}}{12\text{ мкА}} \approx 417$ кОм.