«Серый» ящик

Задача 1. [ВсОШ 2021/22, региональный этап, 10 класс, задача 1] «„Серый“ ящик».

«Серый» ящик с тремя выводами содержит источник постоянного напряжения $\mathcal{E}$ и два резистора. Указанные элементы соединены по одной из двух возможных схем, представленных на рисунке слева (рис. 1). На крышке ящика выводы «1», «2» и «3» в произвольном порядке помечены буквами «A», «B» и «C» (см. фото справа).

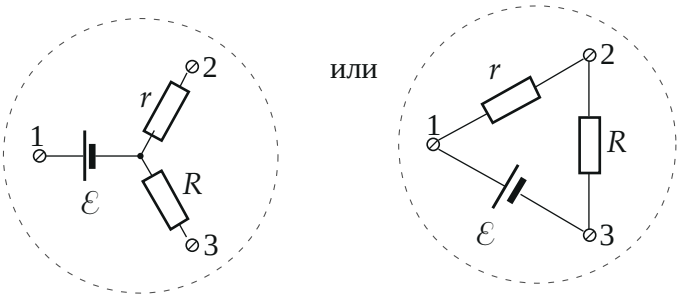


Рис. 1



1. Установите, по какой из двух возможных схем («звезда» или «треугольник») соединены элементы.
2. Установите соответствие между точками «1», «2» и «3» и выводами «A», «B» и «C», считая, что $r < R$.
3. Определите значение напряжения $\mathcal{E}$ и сопротивлений r и R.
4. Погрешность оценивать не нужно.

Внутреннее сопротивление источника напряжения, находящегося в «сером ящике», пренебрежимо мало по сравнению с r и R.

Оборудование: «серый» ящик с тремя выводами, мультиметр с двумя щупами.

Внимание! В начале своего решения обязательно укажите номер выданного вам «серого» ящика (на фото это № 36). Внутреннее сопротивление мультиметра в режиме вольтметра может существенно отличаться от стандартного. Вы не имеете права закорачивать выводы ящика (например, с помощью проводов мультиметра, его щупа и т. д.).

▲ **Решение. Что происходит.** Это «чёрный ящик» на закон Ома для полной цепи. Мультиметр в режиме вольтметра — это резистор R_V, который замыкает цепь источника, и сопротивление его здесь сравнимо с r и R (об этом предупреждает условие). Поэтому вольтметр показывает не ЭДС, а напряжение на R_V. Амперметр, наоборот, почти не имеет сопротивления и показывает ток короткого замыкания через один резистор. Неизвестных четыре — $\mathcal{E}$, r, R, R_V, и четырёх измерений (два напряжения и два тока) хватает, чтобы найти все.

Обозначения. U_{XY} и I_{XY} — показания мультиметра в режимах вольтметра и микроамперметра между выводами X и Y; R_V — сопротивление мультиметра в режиме вольтметра. Все числа ниже — измерения организаторов на ящике № 36.

1. Напряжения между парами выводов:

$$U_{AB} = 0{,}0\ \text{В}, \qquad U_{AC} = 12{,}73\ \text{В}, \qquad U_{BC} = 6{,}82\ \text{В}.$$

Нулевое показание сразу отсекает «треугольник». В нём источник стоит между двумя выводами, и любая пара выводов соединена через ветвь с источником: вольтметр, подключённый к любой паре, замыкает контур с ЭДС и показывает ненулевое напряжение (на выводах самого источника — ровно $\mathcal{E}$). Ноль же получается, только если в контуре «вольтметр + ящик» нет источника.

В «звезде» такая пара есть — это выводы 2 и 3: контур «вольтметр — 2 — r — R — 3» не содержит источника, ток через него не идёт, $U_{23} = 0$ (рис. 3). Значит, в ящике «звезда», $\{A, B\} = \{2, 3\}$, а $C \to 1$.

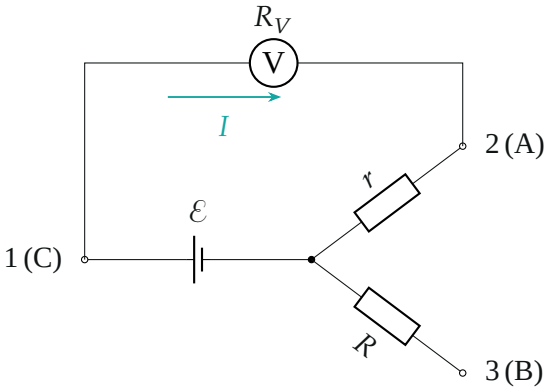
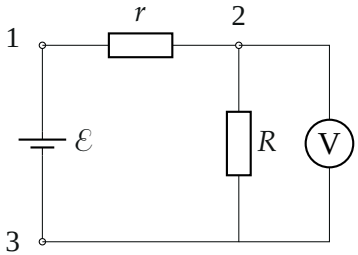
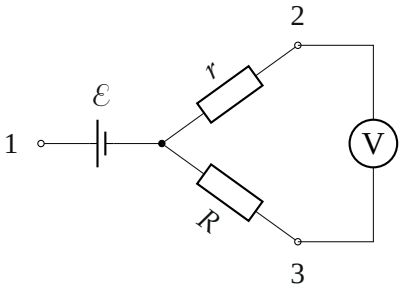


Рис. 2. «Звезда» с вольтметром между выводами C и A: ток идёт по контуру $\mathcal{E} — r — R_V$, и вольтметр показывает только часть ЭДС.



«треугольник»: $U_{23} \neq 0$



«звезда»: $U_{23} = 0$

Рис. 3. Вольтметр между выводами 2 и 3. В «треугольнике» его контур захватывает источник (через R или через r и $\mathcal{E}$), показание не ноль; в «звезде» в контуре только резисторы — показание ноль.

2. Какой вывод куда. Вольтметр между C (1) и выводом 2 стоит в контуре «источник — r — R_V» (рис. 2). По закону Ома для замкнутой цепи ток $I = \mathcal{E}/(R_V + r)$, а показание — напряжение на самом вольтметре:

$$U_{12} = \frac{\mathcal{E}R_V}{R_V + r}, \qquad U_{13} = \frac{\mathcal{E}R_V}{R_V + R}.$$

Чем меньше сопротивление резистора, тем больше показание. Так как $r < R$, большее напряжение $U_{AC} = 12{,}73$ В показывает вывод с резистором r: $A \to 2$, $B \to 3$.

3. Токи. В режиме микроамперметра (предел 200 мкА) сопротивление прибора мало по сравнению с сотнями килоом, и он показывает ток источника, замкнутого через один резистор (рис. 4):

$$I_{AB} = 0, \qquad I_{AC} = 37{,}7 \text{ мкА}, \qquad I_{BC} = 10{,}6 \text{ мкА},$$

и по закону Ома

$$I_{AC} = \frac{\mathcal{E}}{r}, \qquad I_{BC} = \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

Предупреждение условия «не закорачивать выводы» к этому не относится: амперметр замыкает источник через резистор в сотни килоом, ток — десятки микроампер.

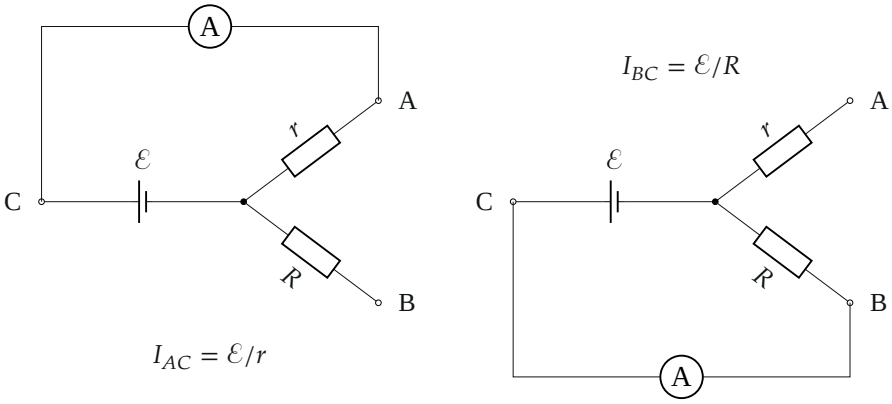


Рис. 4. Микроамперметр почти без сопротивления: через него течёт ток источника, замкнутого через один резистор.

4. Четыре уравнения. Перепишем формулу вольтметра через проводимости: из $U_{AC}(R_V + r) = \mathcal{E}R_V$ и $\mathcal{E} = I_{AC}r$ делением на rR_VU_{AC} получаем

$$\frac{I_{AC}}{U_{AC}} = \frac{1}{r} + \frac{1}{R_V}, \qquad \text{аналогично} \qquad \frac{I_{BC}}{U_{BC}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_V}.$$

Смысл простой: ток короткого замыкания, делённый на показание вольтметра, — это суммарная проводимость резистора и вольтметра. Вычтем

второе из первого, R_V уйдёт, а $1/r = I_{AC}/\mathcal{E}$, $1/R = I_{BC}/\mathcal{E}$:

$$\frac{I_{AC}-I_{BC}}{\mathcal{E}} = \frac{I_{AC}}{U_{AC}} - \frac{I_{BC}}{U_{BC}} \quad\Rightarrow\quad \mathcal{E} = \frac{I_{AC}-I_{BC}}{\dfrac{I_{AC}}{U_{AC}} - \dfrac{I_{BC}}{U_{BC}}}.$$

5. Числа. $I_{AC}/U_{AC} = 2{,}962$ мкСм, $I_{BC}/U_{BC} = 1{,}554$ мкСм,

$$\mathcal{E} = \frac{27{,}1\text{ мкА}}{1{,}408\text{ мкСм}} \approx 19{,}3\text{ В},$$

$$r = \frac{\mathcal{E}}{I_{AC}} \approx 511\text{ кОм}, \qquad R = \frac{\mathcal{E}}{I_{BC}} \approx 1{,}82\text{ МОм},$$

а сопротивление вольтметра $R_V = \left(\dfrac{I_{AC}}{U_{AC}} - \dfrac{1}{r}\right)^{-1} \approx 1{,}0$ МОм — в десять раз меньше «стандартных» 10 МОм, о чём и предупреждало условие. Если пренебречь R_V и считать $\mathcal{E} = U_{AC}$, ошибка была бы полуторакратной.

У мультиметров серий 832 и 838 минимальный предел тока 2000 мкА, показания грубее: $I_{AC} = 38$ мкА, $I_{BC} = 11$ мкА. Та же формула даёт $\mathcal{E} \approx 19{,}7$ В, $r \approx 520$ кОм, $R \approx 1{,}8$ МОм.

Обратите внимание. Нельзя считать вольтметр идеальным: при $R_V \approx 1$ МОм и $r \approx 0{,}5$ МОм он показывает лишь две трети ЭДС, и разные показания $U_{AC} \neq U_{BC}$ — именно след конечного R_V. Порядок выводов при измерениях не важен: от полярности меняется только знак показания.

Проверка. Размерность: $\mathcal{E} = \Delta I/\Delta(I/U)$ — ампер, делённый на сименс, — вольт. Предел: при $R_V \to \infty$ обе дроби I/U стремятся к $1/r$ и $1/R$, и формула переходит в $\mathcal{E} = U_{AC} = U_{BC}$, как и должно быть для идеального вольтметра. Сверка с прямыми измерениями организаторов ($\mathcal{E} = 19{,}20$ В, $r = 507$ кОм, $R = 1{,}8$ МОм) — расхождение меньше 1 %.

Ответ. 1) «звезда»; 2) «1» — «C», «2» — «A», «3» — «B»; 3) для ящика № 36: $\mathcal{E} \approx 19{,}3$ В, $r \approx 510$ кОм, $R \approx 1{,}8$ МОм (с прибором серий 832, 838: $\mathcal{E} \approx 19{,}7$ В, $r \approx 520$ кОм, $R \approx 1{,}8$ МОм).