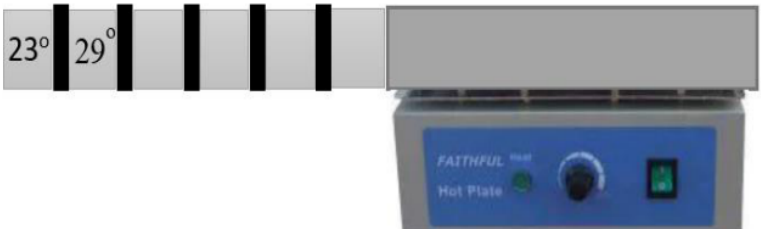
Магнитики

Задача 1. [ВсОШ 2021/22, региональный этап, 10 класс, задача 1] «Магнитики».

Как-то раз в руках у экспериментатора Глюка оказались стопка из шести мощных одинаковых магнитов, разделённых одинаковыми картонными прокладками, и высокоточный термометр. Дело оставалось за малым — провести какой-нибудь эксперимент. Не придумав ничего лучше, Глюк включил лабораторную электроплитку и прикрепил стопку магнитов к её боковой поверхности, затем стал измерять температуру крайнего (дальнего от плитки) магнита. Спустя некоторое время его температура перестала изменяться и оказалась равной $t_1 = 23\,^\circ\text{C}$, а температура соседнего магнита оказалась равной $t_2 = 29\,^\circ\text{C}$. Также Глюк измерил радиус магнита $r = 2{,}0$ см и его высоту (толщину) $h = 1{,}0$ см.



Определите температуру остальных магнитов и температуру плитки. Считайте, что:

- магниты обладают высокой теплопроводностью, поэтому температура магнита одинакова во всех его точках;
- температура воздуха одинакова во всех точках вблизи магнитов и равна $t_{\text{ос}} = 20\,^\circ\text{C}$;
- между магнитом и плиткой картонная прокладка отсутствует;
- теплоотдача в окружающую среду пропорциональна разности температур цилиндра и воздуха и пропорциональна площади контакта магнита с воздухом;
- поток тепла через картонный диск пропорционален разности температур его поверхностей и пропорционален площади диска.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на стационарную теплопередачу. Тепло идёт от плитки вдоль стопки: через каждую прокладку — к следующему магниту, а с каждого магнита часть уходит в воздух. Температуры перестали меняться, значит, для каждого магнита приход тепла за секунду равен расходу — уравнение теплового баланса. Неизвестны два коэффициента (теплопроводность картона и теплоотдача в воздух), но нужно только их отношение, а его дают два измеренных крайних магнита.

Обозначения. Магниты нумеруем от дальнего: $1, 2, \dots, 6$; шестой прижат к плитке. $\tau_n = t_n - t_{\text{ос}}$ — превышение температуры n-го магнита над воздухом; $\tau_1 = 3\,^\circ\text{C}$, $\tau_2 = 9\,^\circ\text{C}$. Поток тепла (джоули в секунду) через прокладку: $P_{\text{к}} = \varkappa(t_{n+1} - t_n)$, в воздух: $P_{\text{в}} = \gamma S \tau_n$, где S — площадь магнита, открытая воздуху; $\varkappa$ и γ — коэффициенты пропорциональности (площадь прокладки у всех одна и вошла в $\varkappa$).

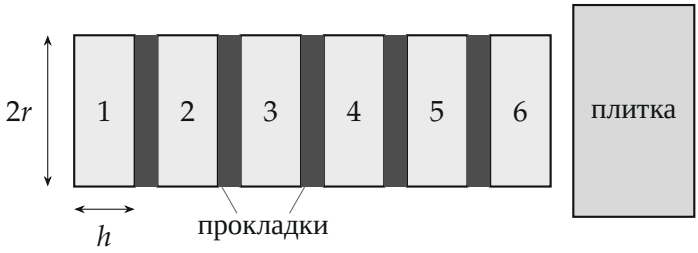


Рис. 2. Стопка вид сбоку: магниты (номера от дальнего), между ними прокладки (чёрные), магнит 6 прижат к плитке без прокладки.

1. Открытые воздуху площади. У магнитов $2, \dots, 6$ с воздухом соприкасается только боковая поверхность $S_{\text{бок}} = 2\pi rh$; торцы закрыты прокладками или плиткой. У крайнего магнита 1 открыт ещё дальний торец πr^2:

$$S_1 = 2\pi rh + \pi r^2 = \pi r(2h + r) = \pi r \cdot 4h = 2S_{\text{бок}},$$

так как по условию $r = 2h$. Крайний магнит отдаёт воздуху с вдвое большей площади.

2. Тепловой баланс магнита 1 (рис. 3, слева). Тепло приходит только

через прокладку от магнита 2, уходит только в воздух: $P_{21} = P_{в1}$, то есть

$$\varkappa(\tau_2 - \tau_1) = \gamma \cdot 2S_{бок}\tau_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\gamma S_{бок}}{\varkappa} = \frac{\tau_2 - \tau_1}{2\tau_1} = \frac{9-3}{2\cdot 3} = 1.$$

Получили отношение коэффициентов: потеря в воздух с боковой поверхности магнита при превышении τ равна потоку через прокладку при перепаде температур в те же τ.

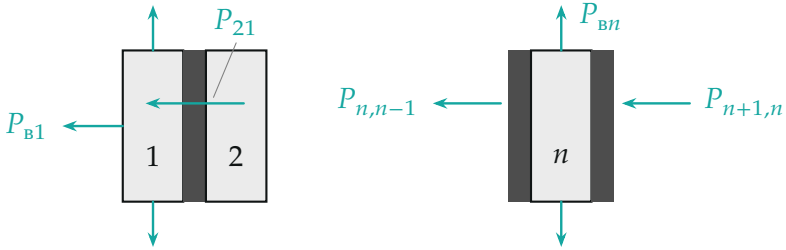


Рис. 3. Потоки тепла: крайний магнит получает P_{21} через одну прокладку и отдаёт $P_{в1}$ воздуху боковой поверхностью и торцом; средний получает $P_{n+1,n}$ справа, отдаёт $P_{n,n-1}$ налево и $P_{вn}$ в воздух (стрелки вверх и вниз — через боковую поверхность).

3. Тепловой баланс магнита n ($2 \le n \le 5$, рис. 3, справа). Приход через правую прокладку равен расходу через левую прокладку плюс потере в воздух, $P_{n+1,n} = P_{n,n-1} + P_{вn}$:

$$\varkappa(\tau_{n+1} - \tau_n) = \varkappa(\tau_n - \tau_{n-1}) + \gamma S_{бок}\tau_n.$$

Делим на $\varkappa$ и подставляем $\gamma S_{бок}/\varkappa = 1$:

$$\tau_{n+1} = 2\tau_n - \tau_{n-1} + \tau_n = 3\tau_n - \tau_{n-1}.$$

4. Счёт по цепочке.

$$\tau_3 = 3 \cdot 9 - 3 = 24\,^\circ\text{C}, \qquad t_3 = 44\,^\circ\text{C},$$
$$\tau_4 = 3 \cdot 24 - 9 = 63\,^\circ\text{C}, \qquad t_4 = 83\,^\circ\text{C},$$
$$\tau_5 = 3 \cdot 63 - 24 = 165\,^\circ\text{C}, \qquad t_5 = 185\,^\circ\text{C},$$
$$\tau_6 = 3 \cdot 165 - 63 = 432\,^\circ\text{C}, \qquad t_6 = 452\,^\circ\text{C}.$$

Магнит 6 прижат к плитке без прокладки и хорошо проводит тепло, поэтому его температура равна температуре плитки: $t_{\text{пл}} = 452\,^\circ\text{C}$.

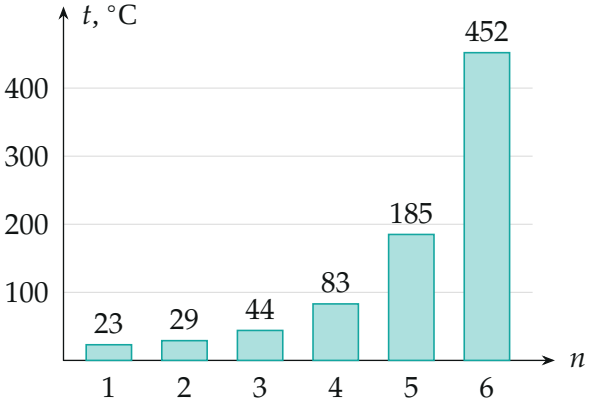


Рис. 4. Температуры магнитов: к плитке они растут почти в 2,6 раза на каждый магнит.

Обратите внимание. Площадь, отдающая тепло в воздух, у крайнего магнита вдвое больше, чем у остальных, — без этого отношение коэффициентов вышло бы вдвое больше, и все ответы были бы другими. Абсолютные значения $\varkappa$ и γ не нужны: опыт задаёт только их отношение, а уравнения ему однородны.

Проверка. Баланс магнита 5 в единицах $\varkappa \cdot {}^\circ\text{C}$: приходит $432 - 165 = 267$, уходит $165 - 63 = 102$ налево и 165 в воздух, $102 + 165 = 267$ — сходится. Рост температур почти геометрический: корень уравнения $q^2 = 3q - 1$ равен $q = (3 + \sqrt{5})/2 \approx 2{,}62$, и действительно $432/165 \approx 2{,}62$. Если бы воздух не отбирал тепла ($\gamma = 0$), перепады на всех прокладках были бы одинаковы и температура росла бы линейно; потери в воздух делают перепад тем больше, чем ближе к плитке.

Ответ. $t_3 = 44\,^\circ\text{C}$, $t_4 = 83\,^\circ\text{C}$, $t_5 = 185\,^\circ\text{C}$, $t_6 = t_{\text{пл}} = 452\,^\circ\text{C}$.