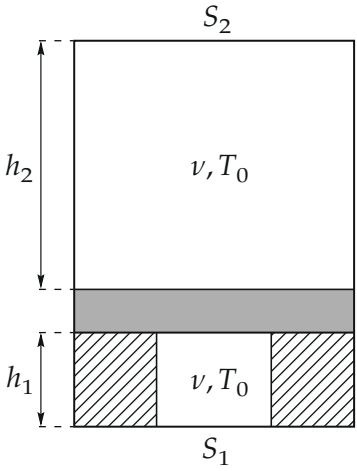
Тяжёлый поршень

Задача 2. [ВсОШ 2021/22, региональный этап, 10 класс, задача 2] «Тяжёлый поршень».

В вертикальном закрытом сосуде переменного сечения имеются два отделения цилиндрической формы: нижнее с площадью сечения $S_1 = S$ и высотой $h_1 = h$ и верхнее с площадью сечения $S_2 = 3S$ и высотой $h_2 = 3h$. Нижнее отделение плотно и герметично закрыто подвижным теплопроводящим поршнем (поршень не приклеен, но газ не проникает в пространство между поршнем и опорами), который может с минимальным трением перемещаться внутри верхнего отделения. В обоих отделениях находится одно и то же количество ν газа при температуре T_0. Газ во всём сосуде медленно нагревают. Когда температура газа достигает величины $2T_0$, поршень отрывается от опор.



1. Чему равна масса поршня?
2. На какой высоте h' от нижнего основания сосуда окажется поршень в равновесии? Температура всего газа поддерживается равной $2T_0$.
3. Газ в сосуде начинают медленно охлаждать. При какой температуре T поршень снова опустится на опоры?

Примечание: температура газа над и под поршнем всегда поддерживается одинаковой.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равновесие поршня и уравнение Менделеева–Клапейрона. Пока поршень лежит на опорах, нижний газ давит только на центральную часть его дна площадью S (на кольцо $2S$ над опорами газ не попадает), а верхний — на всю площадь $3S$. При $2T_0$ силы давления снизу хватает, чтобы поднять поршень, — из этого условия найдём массу. Оторвавшись, поршень открывает нижнему газу всю площадь $3S$: сила снизу скачком растёт втрое, и поршень всплывает до нового равновесия. При охлаждении он опускается, но на опоры садится уже при площади $3S$ снизу — поэтому при температуре ниже $2T_0$. Получается гистерезис.

Обозначения. $p_н$, $p_в$ — давления газа под и над поршнем, $V_н$, $V_в$ — их объёмы; $x = h'/h$. Толщиной поршня пренебрегаем, как в условии: высота сосуда $h_1 + h_2 = 4h$. Ось y направлена вверх.

Пункт 1. Масса поршня.

1. Давления при $T = 2T_0$. Объёмы не менялись: $V_н = Sh$, $V_в = 3S \cdot 3h = 9Sh$. Уравнение Менделеева–Клапейрона для каждого газа:

$$p_н = \frac{2\nu RT_0}{Sh}, \qquad p_в = \frac{2\nu RT_0}{9Sh}.$$

2. Второй закон Ньютона для поршня в проекции на ось y в момент отрыва: ускорение ноль, сила реакции опор обратилась в ноль (рис. 2):

$$p_н S - p_в \cdot 3S - mg = 0,$$

откуда

$$mg = \frac{2\nu RT_0}{h} - \frac{2\nu RT_0}{3h} = \frac{4\nu RT_0}{3h}, \qquad m = \frac{4\nu RT_0}{3gh}.$$

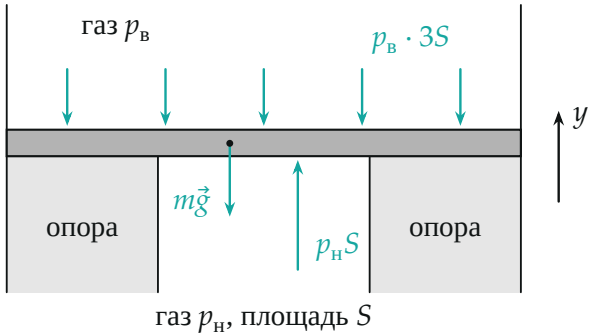


Рис. 2. Силы на поршень в момент отрыва: снизу газ давит только на площадь S, сверху — на 3S; реакция опор равна нулю.

Пункт 2. Новое равновесие.

3. Что меняется после отрыва. Поршень приподнялся, и нижний газ подтекает под всё дно: сила снизу теперь $p_н \cdot 3S$, втрое больше при том же давлении. Равновесие нарушено, поршень поднимается; по мере подъёма нижний газ расширяется, верхний сжимается, и поршень останавливается на высоте h' (рис. 3). Объёмы:

$$V_н = Sh + 3S(h' - h) = S(3h' - 2h), \qquad V_в = 3S(4h - h').$$

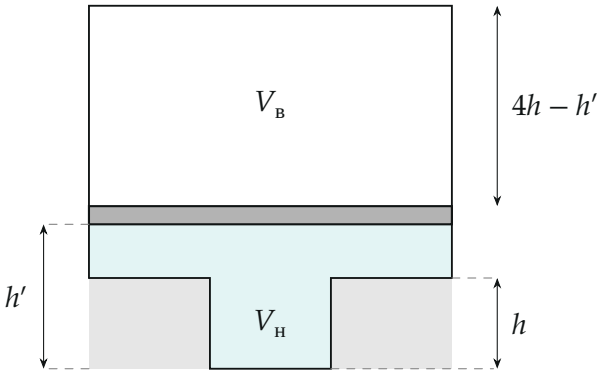


Рис. 3. Поршень в равновесии на высоте h': нижний газ (бирюзовый) занимает нижнее отделение и слой высотой $h' - h$ над опорами.

4. Условие равновесия (второй закон Ньютона, проекция на y) при $T = 2T_0$, давления — из уравнения Менделеева–Клапейрона:

$$\frac{2\nu RT_0}{S(3h' - 2h)} \cdot 3S - \frac{2\nu RT_0}{3S(4h - h')} \cdot 3S = mg = \frac{4\nu RT_0}{3h}.$$

Сокращаем на $2\nu RT_0/h$ и переходим к $x = h'/h$:

$$\frac{3}{3x - 2} - \frac{1}{4 - x} = \frac{2}{3},$$

умножаем на $3(3x - 2)(4 - x)$:

$$9(4 - x) - 3(3x - 2) = 2(3x - 2)(4 - x) \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 23x + 29 = 0.$$

Корни $x = \dfrac{23 \pm \sqrt{181}}{6}$: $x_1 \approx 1{,}59$ и $x_2 \approx 5{,}91$. Второй больше 4 — поршень выше крышки, не подходит. Первый лежит между 1 и 4:

$$h' = \frac{23 - \sqrt{181}}{6} h \approx 1{,}59\, h.$$

Пункт 3. Посадка на опоры.

5. Условие при $h' = h$. При охлаждении поршень плавно опускается, оставаясь в равновесии. В последний момент перед посадкой ($h' = h$, реакции опор ещё нет) нижний газ всё ещё давит на всю площадь $3S$, а объёмы — Sh и $9Sh$:

$$\frac{\nu RT}{Sh} \cdot 3S - \frac{\nu RT}{9Sh} \cdot 3S = mg \quad \Rightarrow \quad \frac{8\nu RT}{3h} = \frac{4\nu RT_0}{3h} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{T_0}{2}.$$

6. Вся картина — петля гистерезиса. В общем случае условие равновесия при температуре T даёт

$$T = \frac{4T_0}{3}\left(\frac{3}{3x - 2} - \frac{1}{4 - x}\right)^{-1};$$

эта зависимость построена на рис. 4 по вычисленным точкам. При на-

греве от T_0 до $2T_0$ поршень лежит на опорах ($x = 1$), при $2T_0$ скачком всплывает до $x = 1{,}59$, при охлаждении спускается по кривой и садится на опоры только при $T_0/2$.

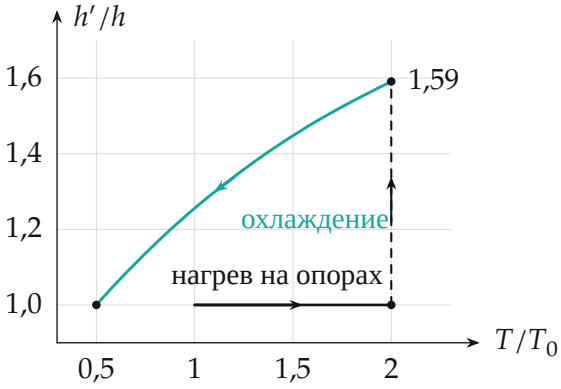


Рис. 4. Высота поршня в зависимости от температуры: нагрев на опорах до $2T_0$, скачок вверх, при охлаждении — спуск по кривой равновесия до посадки при $T_0/2$.

Обратите внимание. Пока поршень на опорах, газ снизу давит только на площадь S, а оторвавшийся — на $3S$; из-за этой разницы температуры отрыва и посадки различаются в четыре раза. Корень $x \approx 5{,}91$ отбрасываем не формально: в сосуде высоты $4h$ поршню выше не подняться.

Проверка. Размерность $m = 4\nu RT_0/(3gh)$: Дж/(м/с^2 · м) = кг. Подстановка $x = 1{,}591$: $3/2{,}773 - 1/2{,}409 = 1{,}082 - 0{,}415 = 0{,}667 = 2/3$ — верно. Знак: при $x = 1$ скобка равна $8/3$, т. е. вчетверо больше, чем при $x = 1{,}59$, — отсюда и четырёхкратная разница температур отрыва и посадки ($2T_0$ и $T_0/2$).

Ответ. 1) $m = \dfrac{4\nu RT_0}{3gh}$; 2) $h' = \dfrac{23 - \sqrt{181}}{6}\,h \approx 1{,}59\,h$; 3) $T = \dfrac{T_0}{2}$.