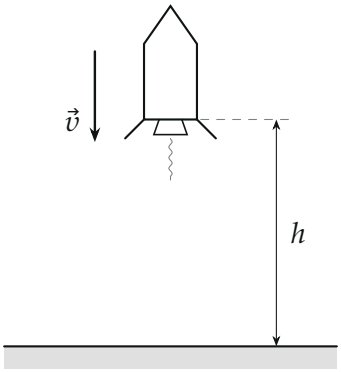
Мягкая посадка

Задача 3. [ВсОШ 2021/22, региональный этап, 10 класс, задача 3] «Мягкая посадка».

Космический корабль должен приземлиться на лишённую атмосферы планету и коснуться её поверхности со скоростью, не превышающей $v_{\text{п}}$, которую могут погасить амортизаторы. На высоте h над поверхностью планеты командир корабля включил тормозной реактивный двигатель, создающий силу тяги, направленную вверх. Какой по величине в этот момент была скорость v корабля, направленная вертикально вниз, если оказалось, что в процессе посадки он истратил минимальное количество топлива? (Если таких скоростей несколько, то укажите их все).

Массовый расход μ топлива и скорость u истечения газов относительно корпуса корабля считайте постоянными (командир может выбирать любое значение расхода μ). Изменение массы корабля не учитывайте, ускорение свободного падения равно g.



Поясняющий рисунок: на высоте h корабль со скоростью v вниз включает тормозной двигатель.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равноускоренное движение и оптимизацию. При постоянном расходе сила тяги $F = \mu u$ постоянна (масса корабля не меняется), значит, ускорение постоянно и торможение равнозамедленное. Топливо — это μt: чем сильнее тормозим, тем больше расход, но тем короче время. Посчитаем топливо как функцию начальной скорости v и конечной $v_{\text{к}}$ и найдём наименьшее. Ключевой

факт: тяга тратится не только на гашение скорости, но и на «удержание» корабля против тяжести, а это пропорционально времени, — поэтому медленное начальное падение не всегда выгодно.

Обозначения. M — масса корабля, v — скорость в момент включения двигателя, $v_к$ — скорость касания ($v_к \le v_п$), a — проекция ускорения на ось y, направленную вверх, t — время торможения, m — масса сгоревшего топлива.

1. Кинематика. Проекция скорости на ось y меняется от $-v$ до $-v_к$ на пути h вниз; для равноускоренного движения

$$v_к^2 - v^2 = -2ah \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v^2 - v_к^2}{2h}, \qquad t = \frac{h}{(v + v_к)/2} = \frac{2h}{v + v_к}$$

(время — путь, делённый на среднюю скорость).

2. Второй закон Ньютона для корабля в проекции на ось y (рис. 2):

$$Ma = \mu u - Mg \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{M(a + g)}{u}.$$

Сила тяги μu равна произведению секундного расхода на скорость истечения — импульс, уносимый газами за секунду.

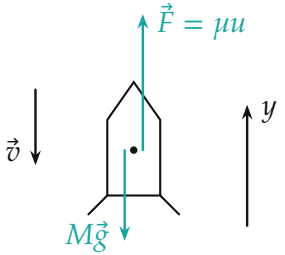


Рис. 2. Силы на корабль при торможении: тяга вверх, тяжесть вниз; скорость направлена вниз.

3. Топливо. Подставим a и t:

$$m = \mu t = \frac{M}{u}\left(\frac{v^2 - v_к^2}{2h} + g\right)\frac{2h}{v + v_к} = \frac{M}{u}\left(v - v_к + \frac{2gh}{v + v_к}\right).$$

Первое слагаемое — погашенная скорость, второе gt — потери на борьбу с тяжестью.

4. Конечная скорость. При заданной v с ростом $v_к$ уменьшаются оба слагаемых: выгодно садиться с наибольшей допустимой скоростью, $v_к = v_п$:

$$m(v) = \frac{M}{u}\left(v - v_п + \frac{2gh}{v + v_п}\right).$$

5. Наименьшее топливо. Запишем m через $s = v + v_п$: $m = \frac{M}{u}\left(s + \frac{2gh}{s} - 2v_п\right)$. Произведение слагаемых s и $2gh/s$ постоянно, а сумма двух положительных чисел с постоянным произведением наименьшая, когда они равны (неравенство Коши: $s + \frac{2gh}{s} \geq 2\sqrt{2gh}$):

$$s = \sqrt{2gh} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh} - v_п, \qquad m_{\min} = \frac{2M}{u}\left(\sqrt{2gh} - v_п\right).$$

График $m(v)$ для $v_п = 0{,}4\sqrt{2gh}$ — на рис. 3: минимум при $v = 0{,}6\sqrt{2gh}$. Медленнее падать невыгодно — дольше «висим» на тяге, быстрее — больше скорости гасить.

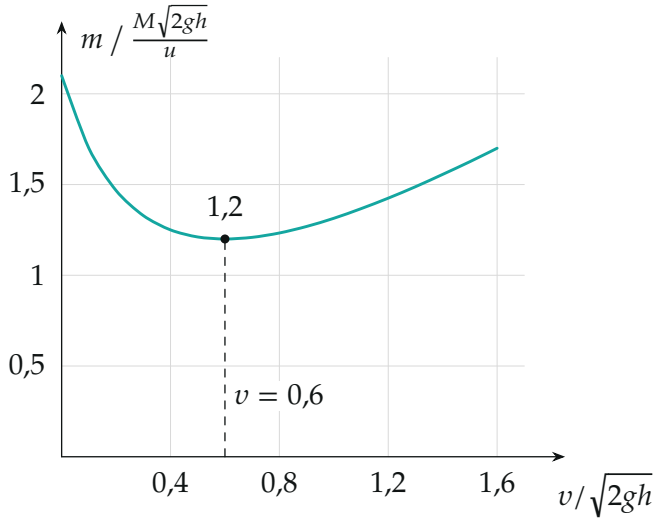


Рис. 3. Масса топлива в зависимости от начальной скорости при $v_п =$

$0{,}4\sqrt{2gh}$ (по вычисленным точкам): минимум 1,2 при $v = \sqrt{2gh} - v_n = 0{,}6\sqrt{2gh}$.

6. Когда двигатель не нужен. Ответ $v = \sqrt{2gh} - v_\text{п}$ имеет смысл при $v_\text{п} < \sqrt{2gh}$. Если $v_\text{п} \geq \sqrt{2gh}$, командир может поставить $\mu = 0$ и падать свободно, истратив ноль топлива — меньше не бывает. По закону сохранения механической энергии скорость касания $v_\text{к} = \sqrt{v^2 + 2gh}$, и условие $v_\text{к} \leq v_\text{п}$ даёт целый промежуток подходящих скоростей:

$$0 \leq v \leq \sqrt{v_\text{п}^2 - 2gh}.$$

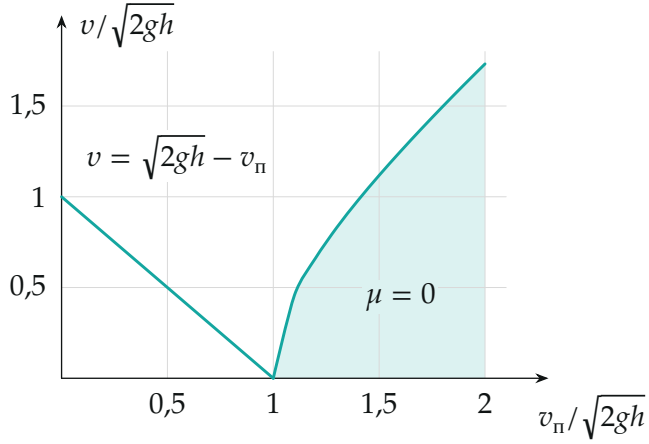


Рис. 4. Ответ: при $v_n < \sqrt{2gh}$ — одна скорость (наклонная прямая), при $v_n \geq \sqrt{2gh}$ — любая скорость из закрашенной области под кривой $\sqrt{v_n^2 - 2gh}$, двигатель не нужен.

Обратите внимание. Начальная скорость, при которой расход наименьший, — не нулевая: зависание с малой скоростью тратит топливо на компенсацию тяжести (gt в формуле). Тяга при оптимуме положительна: $a + g = g\left(1 - \dfrac{v_\text{п} - v}{\sqrt{2gh}}\right) > 0$, так что режим реализуем и при $v < v_\text{п}$, когда корабль у поверхности даже немного разгоняется.

Проверка. Размерность: $\sqrt{2gh}$ — скорость, $m_\text{min} = \frac{2M}{u}(\ldots)$ — масса.

Предел $v_\text{п} \to \sqrt{2gh}$: оба ответа сходятся к $v = 0$ и $m \to 0$ — корабль, отпущенный без скорости, как раз долетает со скоростью $v_\text{п}$, график рис. 4 непрерывен. Предел $v_\text{п} = 0$: $v = \sqrt{2gh}$, $m = 2M\sqrt{2gh}/u$ — тяга вдвое больше веса ($a = g$), корабль тормозит за время $t = \sqrt{2h/g}$.

Ответ. При $v_\text{п} < \sqrt{2gh}$: $v = \sqrt{2gh} - v_\text{п}$ (топлива $m = \frac{2M}{u}(\sqrt{2gh} - v_\text{п})$). При $v_\text{п} \geq \sqrt{2gh}$ двигатель можно не включать, подходит любая скорость $0 \leq v \leq \sqrt{v_\text{п}^2 - 2gh}$.