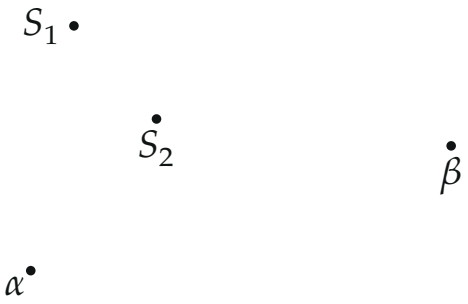
И снова Снеллиус

Задача 4. [ВсОШ 2021/22, региональный этап, 10 класс, задача 4] «И снова Снеллиус».

В архиве Снелла нашли чертёж. От времени чернила частично выцвели и остались видны только 4 точки, 2 из которых являются точечными действительными источниками (S_1 и S_2), а оставшиеся 2 — их изображениями. Из описания к чертежу следовало, что изображения созданы одной линзой. Определите тип линзы, все её возможные положения и соответствующие им положения фокусов.



Примечание: на дополнительном листе приведено в увеличенном масштабе два экземпляра чертежа. Все построения выполняйте на этом листе. Описывать построение параллельных и перпендикулярных прямых, проходящих через заданную точку, деление отрезка пополам и подобные стандартные геометрические процедуры не обязательно.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на построение в геометрической оптике. Не сказано, какое изображение чьё, поэтому возможны два случая: $S_1 \to \beta$, $S_2 \to \alpha$ и $S_1 \to \alpha$, $S_2 \to \beta$. В каждом три свойства тонкой линзы дают всё: точка и её изображение лежат на прямой через оптический центр; прямая и её изображение пересекаются на плоскости линзы; луч, параллельный главной оптической оси, после линзы идёт через фокус.

Обозначения. O — оптический центр, P — точка пересечения прямых S_1S_2 и $\alpha\beta$, F и F' — передний (со стороны источников) и задний фокусы, K — точка линзы, куда приходит луч из S_1, параллельный главной оси.

1. Два свойства, на которых всё держится (рис. 2). Луч через оптический центр не преломляется: источник, O и изображение лежат на одной прямой. Луч, идущий вдоль прямой AB, падает на линзу в точке Q и после преломления идёт через изображения A^* и B^* (каждая точка луча-«предмета» отображается на луч-«изображение»); значит, прямая AB и прямая A^*B^* пересекаются на плоскости линзы.

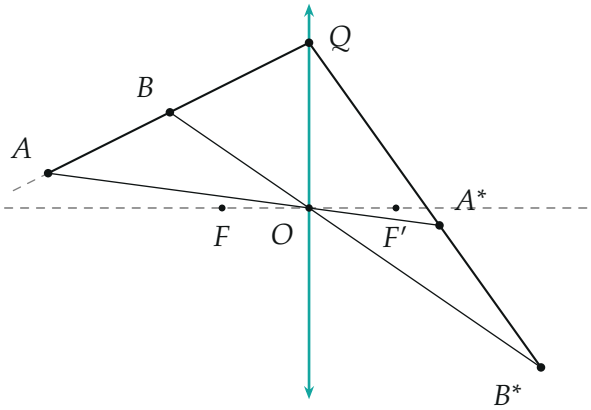


Рис. 2. Источник и изображение лежат на прямой через O; прямая AB и её изображение A^*B^* сходятся в точке Q на линзе.

Случай 1: $S_1 \to \beta$, $S_2 \to \alpha$ (рис. 3).

2. Центр. Прямые $S_1\beta$ и $S_2\alpha$ проходят через оптический центр, значит, O — их пересечение.

3. Плоскость линзы. Прямая S_1S_2 и её изображение — прямая $\beta\alpha$ — пересекаются на линзе, в точке P. Линза — прямая OP, главная оптическая ось — перпендикуляр к ней через O.

4. Тип линзы. Оба источника оказались по одну сторону линзы, а изображения — по разные: β по другую сторону (действительное), α по ту же, что источники (мнимое). Рассеивающая линза даёт от действительного источника только мнимое изображение по ту же сторону, поэтому линза *собирающая*; S_2 ближе к ней, чем фокус (мнимое изображение), S_1 — дальше (действительное).

5. Фокусы. Луч из S_1, параллельный главной оси, приходит на линзу в точку K, преломляется через задний фокус и приходит в изображение

β. Значит, задний фокус F' — пересечение прямой $K\beta$ с осью. Передний фокус F симметричен F' относительно O (по обе стороны тонкой линзы фокусные расстояния равны).

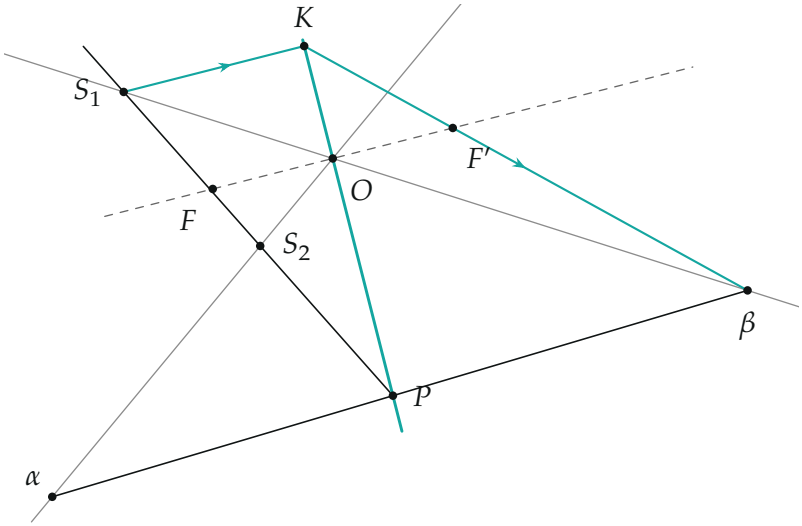


Рис. 3. Случай 1 ($S_1 \to \beta$, $S_2 \to \alpha$): O — пересечение $S_1\beta$ и $S_2\alpha$, линза (бирюзовая) — прямая OP, ось — пунктир; луч S_1K параллелен оси и через F' приходит в β.

Случай 2: $S_1 \to \alpha$**,** $S_2 \to \beta$ (рис. 4). Построение то же: O — пересечение прямых $S_1\alpha$ и $S_2\beta$; точка P на линзе та же, что и в случае 1 (прямые S_1S_2 и $\alpha\beta$ не изменились); линза — прямая OP, ось — перпендикуляр к ней. Источники снова по одну сторону, α — по другую (действительное), β — по ту же (мнимое): линза снова собирающая. Луч из S_1, параллельный оси, через точку K на линзе и задний фокус F' идёт в α; F симметричен F' относительно O.

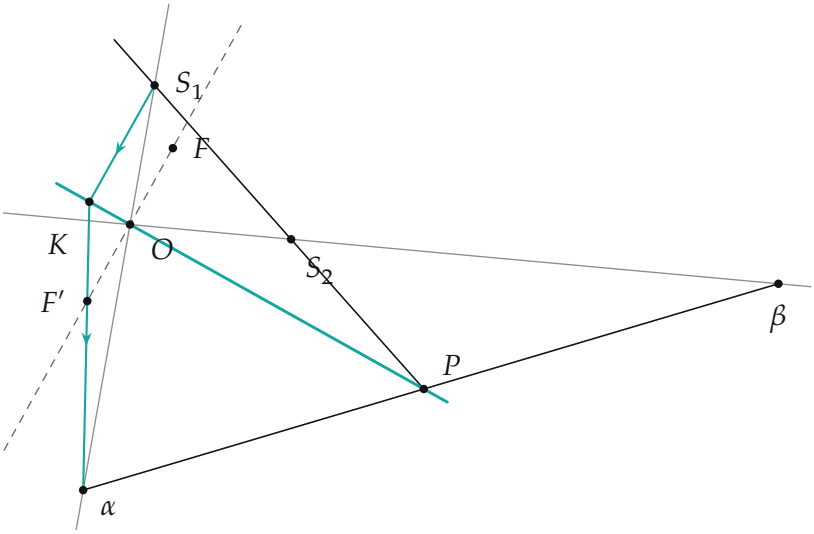


Рис. 4. Случай 2 ($S_1 \to \alpha$, $S_2 \to \beta$): O — пересечение $S_1\alpha$ и $S_2\beta$; линза проходит через ту же точку P, фокусное расстояние меньше, чем в случае 1.

6. Проверка численно. Мы перенесли точки чертежа в координаты и посчитали оба случая (python): в каждом случае формула тонкой линзы для пары S_1 и её изображения и для пары S_2 и её изображения дала *одно и то же* фокусное расстояние (78 и 55 условных единиц чертежа), а увеличения совпали с отношениями расстояний до линзы. В обоих случаях S_1 дальше фокуса, S_2 ближе фокуса — построения непротиворечивы.

Обратите внимание. Задача требует *все* положения линзы: соответствие «источник — изображение» не дано, и каждое из двух соответствий даёт свою линзу. Точка P у них общая, а центры и фокусы разные.

Проверка. Тип линзы виден без счёта: у рассеивающей линзы действительный источник всегда даёт мнимое изображение по ту же сторону, ближе к линзе, — а у нас в обоих случаях одно изображение по другую сторону. Поэтому вариант с рассеивающей линзой исключён полностью.

Ответ. Линза собирающая; два возможных положения. 1) $S_1 \to \beta$, $S_2 \to \alpha$: оптический центр O — пересечение $S_1\beta$ и $S_2\alpha$; 2) $S_1 \to \alpha$, $S_2 \to \beta$: O — пересечение $S_1\alpha$ и $S_2\beta$. В обоих случаях линза — прямая через O и точку $P = S_1S_2 \cap \alpha\beta$, главная ось перпендикулярна ей; задний фокус F'

— пересечение оси с прямой, соединяющей изображение источника S_1 с точкой линзы, куда приходит луч из S_1, параллельный оси; передний фокус симметричен F' относительно O (рис. 3 и 4).