Суммарная мощность

Задача 5. [ВсОШ 2021/22, региональный этап, 10 класс, задача 5] «Суммарная мощность».

В цепи, изображённой на рисунке 1, суммарная мощность, выделяющаяся на резисторах, равна 7 Вт. Определите суммарную мощность, выделяющуюся на резисторах в цепи, изображённой на рисунке 2. Характеристики всех элементов цепей не заданы, но элементы, обозначенные на схемах одинаково, имеют одинаковые характеристики. Источники можно считать идеальными.

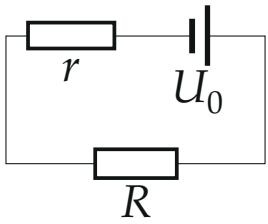

Рис. 1

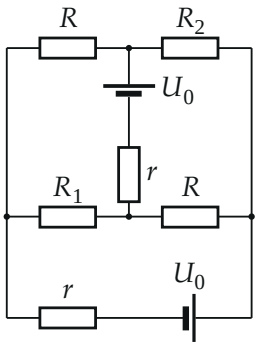

Рис. 2

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на законы Кирхгофа для цепи с двумя источниками. Характеристики неизвестны, поэтому ответ должен выразиться через мощность первой цепи. Мощность, выделяющаяся на резисторах, равна мощности, которую отдают источники: $P =$

$\sum U_0 I_{\text{ист}}$. Значит, достаточно найти токи через источники. Ключевое наблюдение: через R_1 и R_2 ток не течёт, и вторая цепь — это просто одна петля из двух первых цепей, соединённых последовательно.

Обозначения. L — левый провод (левая стенка схемы), Q — правый, A — верхний средний узел, M — средний узел под резистором r; φ — потенциалы, $\varphi_L = 0$. Полярность источников — по рис. 2: длинная пластина — плюс (у верхнего — к A, у нижнего — к Q).

1. Первая цепь. Одна петля: U_0, r и R последовательно. По закону Ома для замкнутой цепи

$$I = \frac{U_0}{R + r}, \qquad P_0 = U_0 I = \frac{U_0^2}{R + r} = 7 \text{ Вт}.$$

2. Догадка для второй цепи. Пусть по петле $L \to r \to U_0 \to Q \to R \to M \to r \to U_0 \to A \to R \to L$ (рис. 3) идёт один и тот же ток I, а через R_1 и R_2 тока нет. Петля содержит два источника, включённых согласно, и сопротивление $2(R+r)$, поэтому по закону Ома для замкнутой цепи

$$I = \frac{2U_0}{2(R + r)} = \frac{U_0}{R + r}.$$

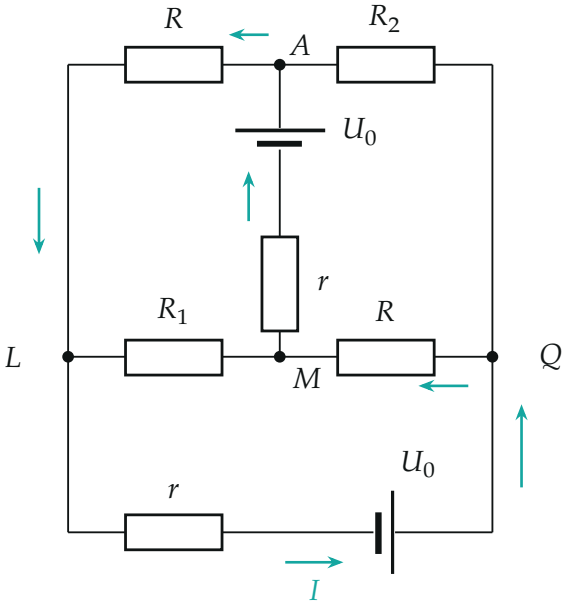

Рис. 3. Ток I обходит петлю через оба источника, два резистора R и два резистора r; через R_1 и R_2 ток не идёт.

3. Проверка догадки потенциалами. Пройдём по петле от L, где $\varphi_L = 0$. На резисторе по току потенциал падает на IR или Ir, на источнике от минуса к плюсу растёт на U_0:

$$\varphi_Q = 0 - Ir + U_0 = IR,$$
$$\varphi_M = \varphi_Q - IR = 0,$$
$$\varphi_A = \varphi_M - Ir + U_0 = IR,$$

и на последнем резисторе R от A к L потенциал падает ровно до нуля. Значит, $\varphi_M = \varphi_L$ и $\varphi_A = \varphi_Q$: напряжения на R_1 (между L и M) и на R_2 (между A и Q) равны нулю, и токов через них действительно нет. Все законы Кирхгофа выполнены, а решение линейной цепи единственно — догадка верна при любых R_1 и R_2. Диаграмма потенциалов вдоль петли — на рис. 4.

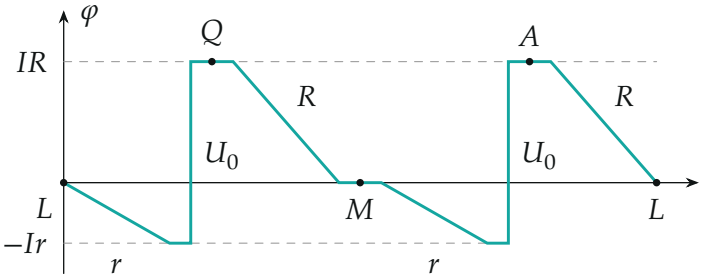

Рис. 4. Потенциал вдоль петли (для примера $R = 2r$): узлы L и M на одном потенциале, A и Q — тоже; поэтому R_1 и R_2 без тока.

4. Мощность. Оба источника отдают ток $I = U_0/(R + r)$:

$$P = 2U_0 I = \frac{2U_0^2}{R + r} = 2P_0 = 14\ \text{Вт}.$$

То же по резисторам: $I^2 \cdot 2(R + r) = 2U_0^2/(R + r)$.

Обратите внимание. Никакой симметрии номиналов здесь нет: R_1 и R_2 произвольные и разные. Ток через них равен нулю потому, что каждая половина петли («источник + r» и «R») повторяет первую цепь, и падение на каждой половине возвращает потенциал к исходному. Мы проверили это и прямым решением системы уравнений Кирхгофа с произвольными R, r, R_1, R_2 (sympy): мощность источников $2U_0^2/(R + r)$.

Проверка. Размерность: $U_0^2/(R+r)$ — ватты. Предел: если убрать R_1 и R_2 (разорвать), цепь становится одной петлёй из двух копий первой цепи — ток тот же, мощность вдвое больше; раз токов в R_1, R_2 нет, их наличие ничего не меняет.

Ответ. $P = 2P_0 = 14$ Вт.