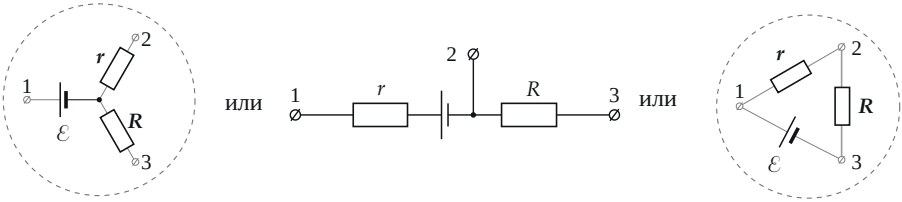
«Серый» ящик

Задача 1. [ВсОШ 2021/22, региональный этап, 11 класс, задача 1] «„Серый“ ящик».

«Серый» ящик с тремя выводами содержит источник с постоянной ЭДС $\mathcal{E}$ и два резистора. Указанные элементы соединены по одной из трёх возможных схем, представленных на рис. 1.



«Звезда» «Цепочка» «Треугольник»

Рис. 1

На крышке ящика выводы в произвольном порядке помечены буквами «A», «B» и «C» (см. фотографию). Внутреннее сопротивление источника ЭДС, находящегося в «сером ящике», пренебрежимо мало по сравнению с r и R.



1. Установите, по какой из трёх возможных схем («звезда», «цепочка» или «треугольник») соединены элементы.
2. Установите соответствие между точками «1», «2», «3» и выводами «A», «B» и «C», считая, что $r < R$.
3. Определите значение ЭДС $\mathcal{E}$ и сопротивления резисторов r и R.

Из-за ограниченного времени на выполнение задания погрешности оценивать не требуется, однако точность полученных вами промежуточных и конечных результатов будет учитываться при выставлении баллов.

Оборудование: «серый» ящик, мультиметр со щупами.

Внимание! 1) В начале своего решения обязательно укажите номер выданного вам «серого» ящика (на фото это № 36). 2) Запрещается закорачивать выводы серого ящика (например, с помощью проводов мультиметра, его щупа и т. д.). 3) Внутреннее сопротивление мультиметра в режиме измерения напряжения может существенно отличаться от стандартного.

▲ **Решение. Что происходит.** Это «чёрный ящик» на закон Ома для полной цепи. Мультиметр в режиме вольтметра — это резистор R_V, который замыкает цепь источника, и сопротивление его здесь сравнимо с r и R (об этом предупреждает условие). Поэтому вольтметр показывает не ЭДС, а напряжение на R_V. Амперметр, наоборот, почти не имеет сопротивления и показывает ток короткого замыкания через один резистор. Неизвестных четыре — $\mathcal{E}$, r, R, R_V, и четырёх измерений (два напряжения и два тока) хватает, чтобы найти все.

Обозначения. U_{XY} и I_{XY} — показания мультиметра в режимах вольтметра и микроамперметра между выводами X и Y; R_V — сопротивление мультиметра в режиме вольтметра. Все числа ниже — измерения организаторов на ящике № 36.

1. Напряжения между парами выводов:

$$U_{AB} = 0{,}0\ \text{В}, \qquad U_{AC} = 12{,}73\ \text{В}, \qquad U_{BC} = 6{,}82\ \text{В}.$$

Нулевое показание сразу отсекает «треугольник». В нём источник стоит между двумя выводами, и любая пара выводов соединена через ветвь с источником: вольтметр, подключённый к любой паре, замыкает контур с ЭДС и показывает ненулевое напряжение (на выводах самого источника — ровно $\mathcal{E}$). Ноль же получается, только если в контуре «вольтметр + ящик» нет источника.

В «звезде» и «цепочке» такая пара есть — это выводы 2 и 3: контур «вольтметр — 2 — резистор(ы) — 3» не содержит источника, ток через него не идёт, $U_{23} = 0$. Значит, $\{A, B\} = \{2, 3\}$, а $C \to 1$.

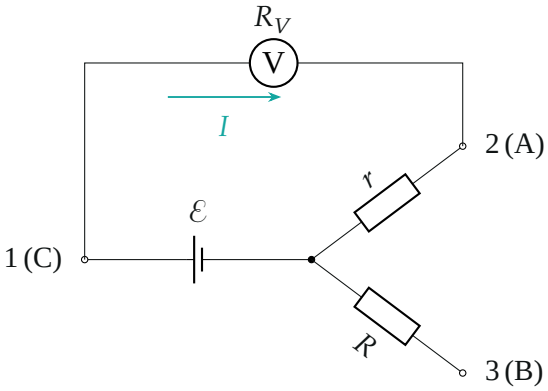


Рис. 2. «Звезда» с вольтметром между выводами C и A: ток идёт по контуру $\mathcal{E} — r — R_V$, и вольтметр показывает только часть ЭДС.

2. Какой вывод куда. Вольтметр между C (1) и выводом 2 стоит в контуре «источник — r — R_V» (рис. 2). По закону Ома для замкнутой цепи ток $I = \mathcal{E}/(R_V + r)$, а показание — напряжение на самом вольтметре:

$$U_{12} = \frac{\mathcal{E}R_V}{R_V + r}, \qquad U_{13} = \frac{\mathcal{E}R_V}{R_V + R}.$$

Чем меньше сопротивление резистора, тем больше показание. Так как $r < R$, большее напряжение $U_{AC} = 12{,}73$ В показывает вывод с резистором r: $A \to 2$, $B \to 3$. Для «цепочки» вывод тот же: там между 1 и 3 стоят r и R последовательно, сопротивление ещё больше, и напряжение U_{13} снова меньше.

3. Токи. В режиме микроамперметра (предел 200 мкА) сопротивление прибора мало по сравнению с сотнями килоом, и он показывает ток источника, замкнутого через один резистор (рис. 3):

$$I_{AB} = 0, \qquad I_{AC} = 37{,}7 \text{ мкА}, \qquad I_{BC} = 10{,}6 \text{ мкА},$$

и по закону Ома

$$I_{AC} = \frac{\mathcal{E}}{r}, \qquad I_{BC} = \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

Предупреждение условия «не закорачивать выводы» к этому не относится: амперметр замыкает источник через резистор в сотни килоом, ток —

десятки микроампер.

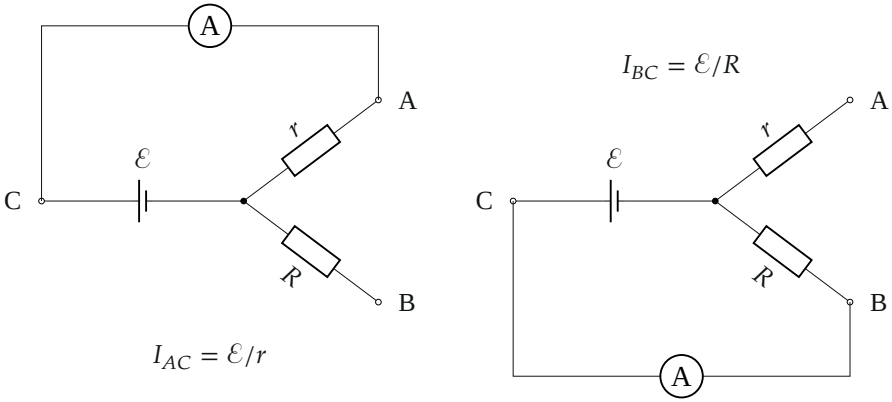


Рис. 3. Микроамперметр почти без сопротивления: через него течёт ток источника, замкнутого через один резистор.

4. Четыре уравнения. Перепишем формулу вольтметра через проводимости: из $U_{AC}(R_V + r) = \mathcal{E}R_V$ и $\mathcal{E} = I_{AC}r$ делением на rR_VU_{AC} получаем

$$\frac{I_{AC}}{U_{AC}} = \frac{1}{r} + \frac{1}{R_V}, \qquad \text{аналогично} \qquad \frac{I_{BC}}{U_{BC}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_V}.$$

Смысл простой: ток короткого замыкания, делённый на показание вольтметра, — это суммарная проводимость резистора и вольтметра. Вычтем второе из первого, R_V уйдёт, а $1/r = I_{AC}/\mathcal{E}$, $1/R = I_{BC}/\mathcal{E}$:

$$\frac{I_{AC} - I_{BC}}{\mathcal{E}} = \frac{I_{AC}}{U_{AC}} - \frac{I_{BC}}{U_{BC}} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E} = \frac{I_{AC} - I_{BC}}{\dfrac{I_{AC}}{U_{AC}} - \dfrac{I_{BC}}{U_{BC}}}.$$

5. Числа. $I_{AC}/U_{AC} = 2{,}962$ мкСм, $I_{BC}/U_{BC} = 1{,}554$ мкСм,

$$\mathcal{E} = \frac{27{,}1\ \text{мкА}}{1{,}408\ \text{мкСм}} \approx 19{,}3\ \text{В},$$

$$r = \frac{\mathcal{E}}{I_{AC}} \approx 511\ \text{кОм}, \qquad R = \frac{\mathcal{E}}{I_{BC}} \approx 1{,}82\ \text{МОм},$$

а сопротивление вольтметра $R_V = \left(\dfrac{I_{AC}}{U_{AC}} - \dfrac{1}{r}\right)^{-1} \approx 1{,}0$ МОм — в десять раз меньше «стандартных» 10 МОм, о чём и предупреждало условие. Если пренебречь R_V и считать $\mathcal{E} = U_{AC}$, ошибка была бы полуторакратной.

У мультиметров серий 832 и 838 минимальный предел тока 2000 мкА, показания грубее: $I_{AC} = 38$ мкА, $I_{BC} = 11$ мкА. Та же формула даёт $\mathcal{E} \approx 19{,}7$ В, $r \approx 520$ кОм, $R \approx 1{,}8$ МОм.

6. «Звезда» или «цепочка». Измерения напряжений и токов эти схемы не различают: в «цепочке» все формулы те же с заменой $R \to r + R$ (между 1 и 3 стоят оба резистора). Различает их омметр между выводами 2 и 3 (A и B), где источника в контуре нет (рис. 4): в «звезде» он показал бы $r + R$, в «цепочке» — только R.

- «Цепочка»: $r = 511$ кОм, $r + R = 1{,}82$ МОм, т. е. $R = 1{,}31$ МОм — омметр на пределе 2 МОм показал бы 1,31 МОм.
- «Звезда»: $r + R = 0{,}51 + 1{,}82 = 2{,}33$ МОм > 2 МОм — омметр «зашкаливает».

На опыте омметр даже на пределе 2 МОм «зашкаливает». Значит, в ящике — «звезда».

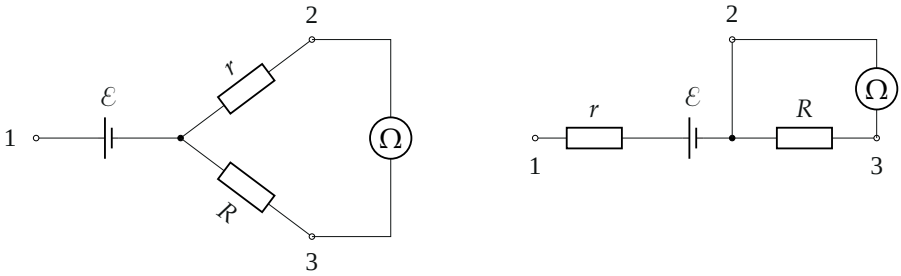


Рис. 4. Омметр между выводами 2 и 3: в «звезде» он измеряет $r + R$, в «цепочке» — только R; источник в его контур не входит.

Обратите внимание. Нельзя считать вольтметр идеальным: при $R_V \approx 1$ МОм и $r \approx 0{,}5$ МОм он показывает лишь две трети ЭДС, и разные показания $U_{AC} \neq U_{BC}$ — именно след конечного R_V. Порядок

выводов при измерениях не важен: от полярности меняется только знак показания.

Проверка. Размерность: $\mathcal{E} = \Delta I/\Delta(I/U)$ — ампер, делённый на сименс, — вольт. Предел: при $R_V \to \infty$ обе дроби I/U стремятся к $1/r$ и $1/R$, и формула переходит в $\mathcal{E} = U_{AC} = U_{BC}$, как и должно быть для идеального вольтметра. Сверка с прямыми измерениями организаторов ($\mathcal{E} = 19{,}20$ В, $r = 507$ кОм, $R = 1{,}8$ МОм) — расхождение меньше 1 %.

Ответ. 1) «звезда»; 2) $C \to 1$, $A \to 2$, $B \to 3$; 3) для ящика № 36: $\mathcal{E} \approx 19{,}3$ В, $r \approx 510$ кОм, $R \approx 1{,}8$ МОм (с прибором серий 832, 838: $\mathcal{E} \approx 19{,}7$ В, $r \approx 520$ кОм, $R \approx 1{,}8$ МОм).