Изменяющаяся траектория

Задача 2. [ВсОШ 2021/22, региональный этап, 11 класс, задача 2] «Изменяющаяся траектория».

Оборудование: гайка М10; нить длиной 2,5–3 м; секундомер; линейка длиной 50 см; два канцелярских зажима (клипсы 51 мм); лист бумаги А4; два листа миллиметровой бумаги А4 для построения графиков.

Закрепите зажимы на краю стола на расстоянии 40–45 см друг от друга. Привяжите концы нити к проволочным «лапкам» зажимов так, чтобы прогиб ΔL составлял 2–3 см. К середине этой нити привяжите другую нить длиной около 60 см с гайкой. У вас должна получиться система из нитей и гайки, представленная на рис. 1. Изменяя расстояние между зажимами, вы можете регулировать величину «прогиба» ΔL.

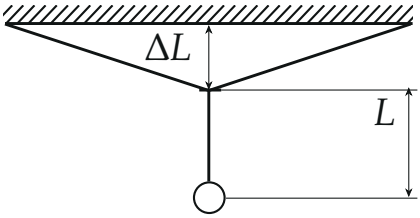


Рис. 1

Обозначим вертикальную плоскость, в которой находятся нити и гайка в положении равновесия (плоскость рисунка), символом P.

Задание. На листе бумаги проведите прямую линию. Положите лист на пол так, чтобы нарисованная прямая находилась строго под краем стола и была ему параллельна.

1. Измерьте период T_1 колебаний математического маятника, совершаемых в плоскости P, параллельной краю стола. Маятник должен перемещаться над нарисованной прямой.
2. Измерьте период T_2 колебаний математического маятника, совершаемых в вертикальной плоскости (S), перпендикулярной краю стола. Чтобы контролировать движение маятника, расположите на полу лист бумаги так, чтобы нарисованная прямая была перпендикулярна краю стола.

3. Положите лист на полу так, чтобы нарисованная прямая составляла угол приблизительно 45° с плоскостью P. Отклоните гайку вдоль нарисованной прямой не несколько см в вертикальной плоскости S и отпустите её. Гайка начнёт совершать движение по медленно изменяющейся траектории. Проекция траектории на горизонтальную плоскость сначала близка к прямой, затем постепенно превращается в эллиптическую, круговую и т. д. Вы можете заметить, что движение гайки является циклическим, то есть через некоторое время τ движение гайки вернётся в исходную плоскость S, и её траектория будет близка к первоначальной прямой. Измерьте период τ.
4. Исследуйте экспериментально зависимость $\tau(\Delta L)$, изменяя ΔL в диапазоне 2–7 см (не менее 5 точек) при постоянном значении L (50 см). Результаты измерений запишите в таблицу.
5. Исследуйте экспериментально зависимость $\tau(L)$, изменяя L в диапазоне 25–60 см (не менее 5 точек) при постоянном значении ΔL (2,5–4 см). Результаты измерений запишите в таблицу.
6. При $\dfrac{\Delta L}{L} \ll 1$ зависимость $\tau(\Delta L, L)$ может быть описана формулой $\tau = A \cdot L^{\alpha} \cdot \Delta L^{\beta}$. Используя графическую обработку экспериментальных результатов, определите значения α и β.
7. Предложите теоретическое обоснование зависимости $\tau = A \cdot L^{\alpha} \cdot \Delta L^{\beta}$, получите теоретическое значение параметров этой зависимости (A, α и β). Сравните теоретические результаты для α и β с экспериментальными.

Примечание. При работе над п. 4 вы можете использовать приближение $(1 + x)^n \approx 1 + nx$, справедливое при $x \ll 1$. Из-за ограниченного времени выполнения задания погрешности определения α и β оценивать не требуется, однако точность полученных вами промежуточных и конечных результатов будет учитываться при выставлении баллов.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на сложение двух взаимно перпендикулярных колебаний с близкими частотами (двумерные «биения»). Гайка качается на подвесе, у которого длина зависит от направления качания: вдоль края стола (плоскость P) она качается вокруг уз-

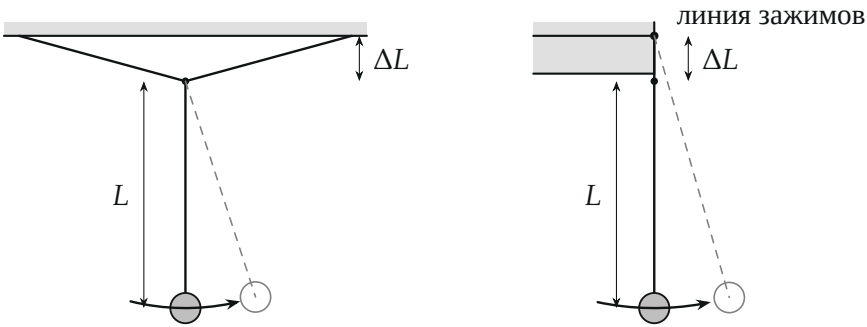
ла, поперёк (плоскость S) — вместе со всей V-образной нитью вокруг линии зажимов. Периоды чуть различаются, разность фаз двух колебаний медленно набегает, и траектория «перетекает»: прямая → эллипс → окружность → прямая под другим углом → …Цикл завершается, когда набег фазы равен 2π. Сначала обработаем опыт (п. 1–6), потом выведем формулу (п. 7) и сравним.

Обозначения. L — длина нижней нити от узла до центра гайки, ΔL — прогиб (глубина узла под линией зажимов), T_1, T_2 — периоды в плоскостях P и S, τ — время цикла. Числа — измерения организаторов.

Пункты 1–3. Периоды и время цикла. Период измеряем по многим колебаниям, чтобы ошибка реакции (около 0,2 с) делилась на их число:

$$T_1 = \frac{45{,}9\text{ с}}{30} = 1{,}530\text{ с}, \qquad T_2 = \frac{63{,}4\text{ с}}{40} = 1{,}585\text{ с}, \qquad \tau = 63{,}0\text{ с}.$$

$T_2 > T_1$: поперёк края стола маятник длиннее (рис. 2). Как будет показано в п. 7, должно быть $\tau = T_1T_2/(T_2 - T_1)$; эта формула даёт 44 с вместо измеренных 63 с. Причина — в разности $T_2 - T_1 = 0{,}055$ с: ошибка в 0,01 с в каждом периоде меняет её на десятки процентов. Поэтому τ надо мерить напрямую, что и делается дальше.



плоскость P: длина L плоскость S: длина $L + \Delta L$

Рис. 2. Вдоль края стола V-образная нить неподвижна, и гайка качается вокруг узла; поперёк края вся система поворачивается вокруг линии зажимов (точка на виде сбоку).

Пункт 4. Зависимость $\tau(\Delta L)$ при $L = 60$ см (так измеряли организаторы):

ΔL, см	1,6	2,6	2,9	3,2	3,7	4,4	4,5	5,1	6,4	7,1
τ, с	107	69	63	58	49	42	42	38	29	26
$\ln(\Delta L/\text{см})$	0,47	0,96	1,06	1,16	1,31	1,48	1,50	1,63	1,86	1,96
$\ln(\tau/\text{с})$	4,67	4,23	4,14	4,06	3,89	3,74	3,74	3,64	3,37	3,26

Пункт 5. Зависимость $\tau(L)$ при $\Delta L = 2{,}6$ см:

L, см	23	30	37,5	46	53,5	60
τ, с	15	24	31	42	58	68
$\ln(L/\text{см})$	3,14	3,40	3,62	3,83	3,98	4,09
$\ln(\tau/\text{с})$	2,71	3,18	3,43	3,74	4,06	4,22

Пункт 6. Показатели степени. Степенную зависимость логарифм превращает в линейную:

$$\ln\tau = \ln A + \alpha \ln L + \beta \ln \Delta L.$$

При постоянном L график $\ln\tau(\ln\Delta L)$ — прямая с наклоном β (рис. 3), при постоянном ΔL график $\ln\tau(\ln L)$ — прямая с наклоном α (рис. 4). Точки действительно ложатся на прямые; наклоны по методу наименьших квадратов:

$$\beta \approx -0{,}94, \qquad \alpha \approx 1{,}55.$$

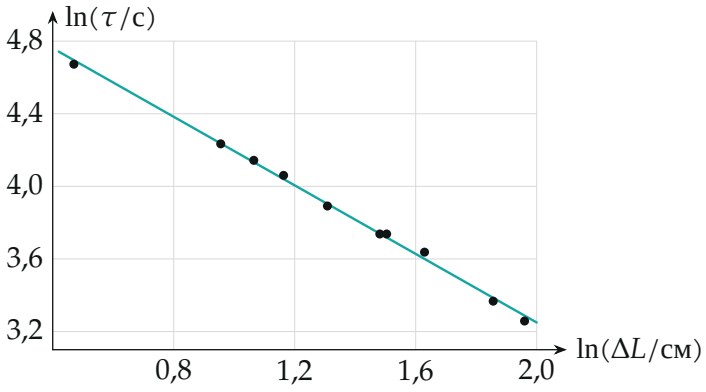


Рис. 3. $\ln\tau$ *от* $\ln\Delta L$ *при* $L = 60$ *см: наклон прямой* $\beta \approx -0{,}94$.

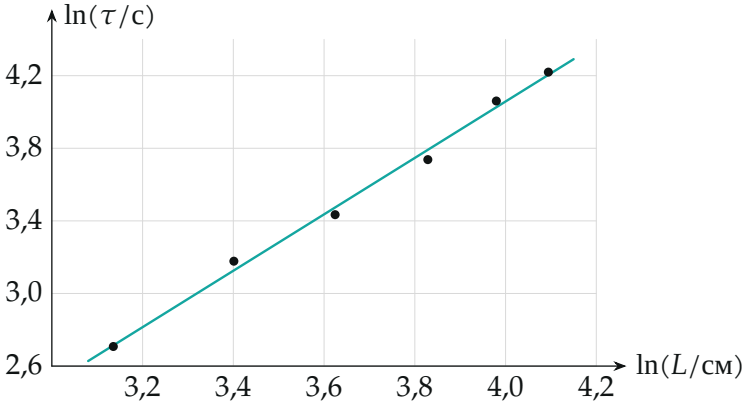


Рис. 4. $\ln\tau$ *от* $\ln L$ *при* $\Delta L = 2{,}6$ *см: наклон прямой* $\alpha \approx 1{,}55$.

Пункт 7. Теория. Разложим движение гайки при малых отклонениях на два независимых колебания: вдоль оси x в плоскости P и вдоль оси y в плоскости S. Каждое — колебание математического маятника своей длины (рис. 2):

$$x = x_0\cos\omega_1 t, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{L}}; \qquad y = y_0\cos\omega_2 t, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{L+\Delta L}}.$$

Гайку отпустили на прямой под 45°: $x_0 = y_0$, колебания в фазе, траектория — отрезок. Колебание по y медленнее, и разность фаз $\varphi =$

$(\omega_1 - \omega_2)t$ растёт. При $\varphi = \pi/2$ траектория — окружность, при $\varphi = \pi$ — отрезок, повёрнутый на 90°, при $3\pi/2$ — снова окружность (обход в другую сторону), при 2π — исходный отрезок (рис. 5). Значит, цикл

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1}.$$

Иначе: за время τ в плоскости P проходит ровно на одно колебание больше, чем в плоскости S.

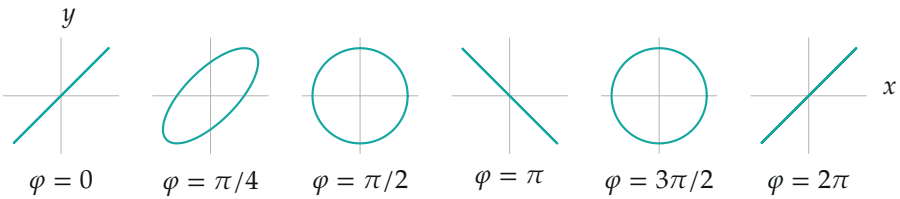


Рис. 5. Проекция траектории на пол при разных набегах фазы φ: отрезок под 45°, эллипс, окружность, отрезок под −45°, окружность, исходный отрезок.

При $\Delta L \ll L$ упростим разность частот, пользуясь $(1+x)^n \approx 1 + nx$:

$$\omega_2 = \omega_1 \left(1 + \frac{\Delta L}{L}\right)^{-1/2} \approx \omega_1 \left(1 - \frac{\Delta L}{2L}\right) \quad \Rightarrow \quad \omega_1 - \omega_2 \approx \omega_1 \frac{\Delta L}{2L}.$$

Отсюда

$$\tau \approx \frac{2\pi}{\omega_1} \cdot \frac{2L}{\Delta L} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \cdot \frac{2L}{\Delta L} = \frac{4\pi}{\sqrt{g}} L^{3/2} \Delta L^{-1}.$$

Число колебаний за цикл $n \approx 2L/\Delta L$: при $L = 60$ см, $\Delta L = 2{,}6$ см это около 46 колебаний.

Теория: $A = 4\pi/\sqrt{g} \approx 4{,}0$ с · м$^{-1/2}$, $\alpha = 1{,}5$, $\beta = -1$. Опыт: $\alpha \approx 1{,}55$, $\beta \approx -0{,}94$ — согласие в пределах нескольких процентов. Абсолютные значения тоже сходятся: при $L = 0{,}60$ м, $\Delta L = 0{,}026$ м приближённая формула даёт $\tau = 72$ с, точная $2\pi/(\omega_1 - \omega_2)$ — 76 с, измерено 69 с.

Обратите внимание. Цикл — набег фазы 2π, а не π: при $\varphi = \pi$ траектория тоже отрезок, но зеркальный исходному (под −45°). Длина

маятника в плоскости S — от линии зажимов, а не от узла: туда входит прогиб ΔL, ради которого и сделан опыт.

Проверка. Размерность: $[L^{3/2}/(\sqrt{g}\,\Delta L)] = \text{м}^{1/2}/(\text{м}/\text{с}^2)^{1/2} = \text{с}$. Предел: $\Delta L \to 0$ — длины в двух плоскостях равны, траектория не меняется, $\tau \to \infty$; так и есть. Отклонение β от -1 в сторону меньших по модулю значений ожидаемо: при больших ΔL малость $\Delta L/L$ хуже, а точная формула $\tau = 2\pi/(\omega_1 - \omega_2)$ растёт с ΔL чуть медленнее.

Ответ. 1) $T_1 \approx 1{,}53$ с; 2) $T_2 \approx 1{,}59$ с; 3) $\tau \approx 63$ с; 4), 5) таблицы выше; 6) $\alpha \approx 1{,}55$, $\beta \approx -0{,}94$; 7) $\tau = \dfrac{4\pi}{\sqrt{g}} L^{3/2}\Delta L^{-1}$: $A = 4\pi/\sqrt{g} \approx 4{,}0\ \text{с}\cdot\text{м}^{-1/2}$, $\alpha = 1{,}5$, $\beta = -1$ — согласуется с опытом.