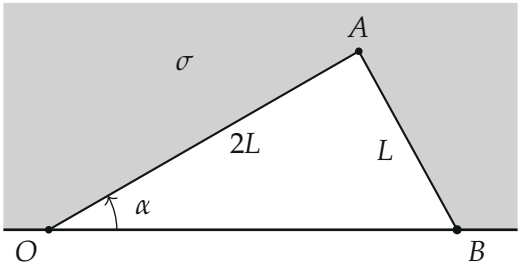
Треугольник и плёнка

Задача 1. [ВсОШ 2021/22, региональный этап, 11 класс, задача 1] Лёгкие стержни OA и AB соединены шарнирно между собой. Конец O стержня OA закреплён шарнирно на гладкой спице, а на конце B стержня AB прикреплено с помощью шарнира маленькое колечко массы m, которое может скользить по спице. Длины стержней различаются в два раза: $|AB| = L$, $|OA| = 2L$, все шарниры невесомы. Система снаружи (до закреплённой внешней границы) окружена двусторонней плёнкой с коэффициентом поверхностного натяжения σ. В области между спицей и стержнями плёнки нет. Силу тяжести не учитывайте.



1. Найдите величину угла α в положении равновесия.
2. Найдите период малых колебаний системы вблизи положения равновесия.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равновесие и малые колебания через потенциальную энергию. Плёнка стремится сократить свою площадь, а площадь плёнки — это вся площадь до внешней границы минус площадь треугольника OAB. Энергия плёнки минимальна, когда треугольник OAB максимален по площади, — это и есть равновесие. Стержни лёгкие, кинетическая энергия есть только у колечка, поэтому колебания — колебания одного тела массы m в потенциале плёнки: найдём «жёсткость» k из второй производной энергии.

Обозначения. φ — угол OAB между стержнями; S — площадь треугольника OAB; x — смещение колечка вдоль спицы от равновесия (вправо — от O); E — энергия плёнки.

Пункт 1. Угол α в равновесии.

1. Энергия плёнки. Энергия поверхностного натяжения равна σ, умноженному на площадь поверхности; у двусторонней плёнки поверхностей две:

$$E = 2\sigma\,(S_0 - S),$$

где S_0 — площадь до внешней границы (постоянна). Равновесие — минимум E, то есть максимум S.

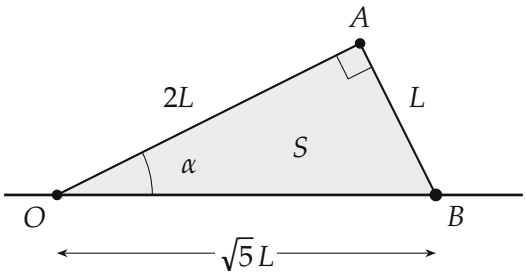
2. Площадь треугольника. Стороны $OA = 2L$ и $AB = L$ заданы, меняется только угол φ между ними:

$$S = \frac{1}{2}\cdot 2L\cdot L\sin\varphi = L^2\sin\varphi.$$

Максимум — при $\varphi = 90°$: стержни перпендикулярны. В прямоугольном треугольнике OAB с катетами $2L$ и L

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{1}{2}, \qquad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} = \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} \approx 26{,}6°.$$

При этом $OB = \sqrt{(2L)^2 + L^2} = \sqrt{5}\,L$.



Равновесие: стержни перпендикулярны, площадь треугольника наибольшая, $S = L^2$

Пункт 2. Период малых колебаний.

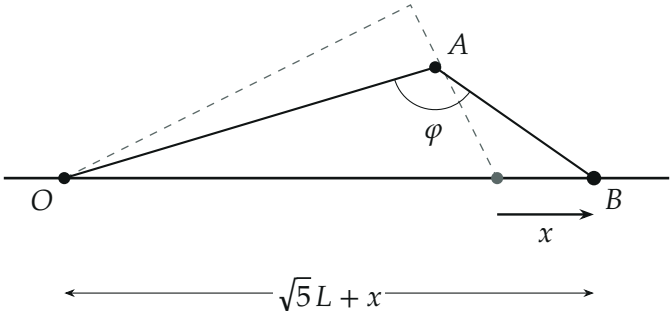
3. Угол между стержнями при смещении. Сдвинем колечко на x: $OB = \sqrt{5}\,L + x$. Теорема косинусов для треугольника OAB (сторона OB

против угла φ):

$$(\sqrt{5}\,L + x)^2 = (2L)^2 + L^2 - 2 \cdot 2L \cdot L\cos\varphi,$$

$$\cos\varphi = -\frac{2\sqrt{5}\,Lx + x^2}{4L^2} \approx -\frac{\sqrt{5}\,x}{2L}.$$

Знак: при $x > 0$ треугольник растягивается вдоль спицы, угол φ становится тупым.

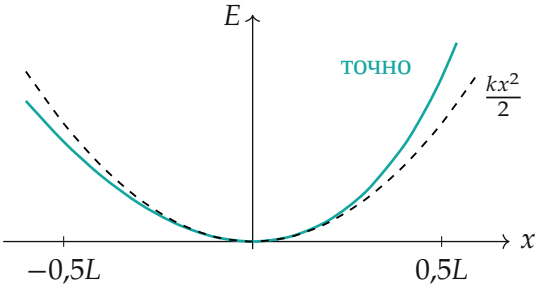


Колечко сдвинуто на $x = 0{,}5L$ (посчитано): угол между стержнями $\varphi \approx 128°$, площадь треугольника меньше; пунктир — равновесие

4. Энергия как у пружины. Подставим $\sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi} \approx 1 - \frac{\cos^2\varphi}{2} \approx 1 - \frac{5x^2}{8L^2}$ в энергию и отсчитаем её от равновесия (там $S = L^2$):

$$E(x) = 2\sigma\left(L^2 - L^2\sin\varphi\right) \approx 2\sigma L^2 \cdot \frac{5x^2}{8L^2} = \frac{5\sigma x^2}{4},$$

$$E(x) = \frac{kx^2}{2}, \qquad k = \frac{5\sigma}{2}.$$



Энергия плёнки $E(x)$: точный расчёт (бирюза) и парабола $\frac{kx^2}{2}$ (пунктир); при малых x они совпадают

5. Период. Стержни и шарниры невесомы, поэтому кинетическая энергия системы — это $\dfrac{m\dot{x}^2}{2}$ колечка. Закон сохранения энергии $\dfrac{m\dot{x}^2}{2} + \dfrac{kx^2}{2} = \text{const}$ совпадает с законом для груза на пружине жёсткости k, поэтому колебания гармонические:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{5\sigma}}.$$

Второй способ (силы). Плёнка тянет каждый стержень перпендикулярно ему с силой 2σ на единицу длины. Стержни лёгкие, поэтому их уравнения моментов задают силы в шарнирах; в равновесии получается $\operatorname{tg}\beta = 2$ (β — угол при B), то есть снова прямой угол при A. Линеаризация уравнения движения колечка даёт $m\ddot{x} = -\frac{5}{2}\sigma x$ — та же жёсткость.

Обратите внимание. Плёнка двусторонняя: энергия $2\sigma S$, а не σS. Потеря двойки дала бы T в $\sqrt{2}$ раз больше.

Проверка. Размерность: σ — Н/м, как у жёсткости, $\sqrt{m/\sigma}$ — с. Длина L в ответ не входит: энергия $\propto \sigma x^2$, и масштаб длины сокращается — как у пружины, жёсткость которой не зависит от растяжения.

Ответ. 1) $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{5}} \approx 26{,}6°$; 2) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2m}{5\sigma}}$.