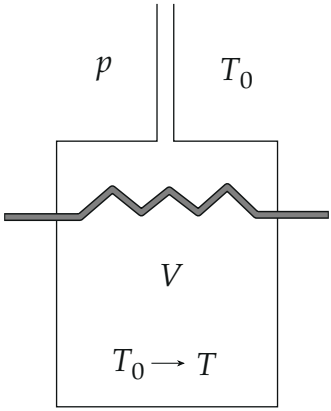
Охлаждение

Задача 2. [ВсОШ 2021/22, региональный этап, 11 класс, задача 2] Сосуд объёмом V с теплообменником (змеевиком) внутри сообщается с атмосферой через тонкую длинную трубку (см. рис.). Исходная температура T_0 в нём равна температуре атмосферного воздуха. По теплообменнику прокачивают охлаждающую жидкость до тех пор, пока температура воздуха во всём сосуде не уменьшится до T ($T < T_0$). Сколько тепла от воздуха передано теплообменнику? Атмосферное давление p. Потоком тепла через стенки сосуда и трубку можно пренебречь. Внутренняя энергия воздуха $U = \frac{5}{2}\nu RT$, где ν — число молей, T — температура, а R — газовая постоянная.



▲ **Решение. Что происходит.** Воздух в сосуде охлаждается при постоянном давлении p (сосуд открыт в атмосферу) и сжимается — поэтому через трубку в сосуд *входит* атмосферный воздух. Это задача на первый закон термодинамики для системы с переменным количеством вещества. Главная идея — выбрать систему так, чтобы её масса не менялась: весь воздух, который окажется в сосуде в конце. Вначале часть этого воздуха ещё снаружи, и атмосфера, вталкивая его, совершает работу $p\Delta V$.

Обозначения. ν_0, ν — число молей в сосуде в начале и в конце; V_a — объём, который вошедший воздух занимал снаружи (при p, T_0); A —

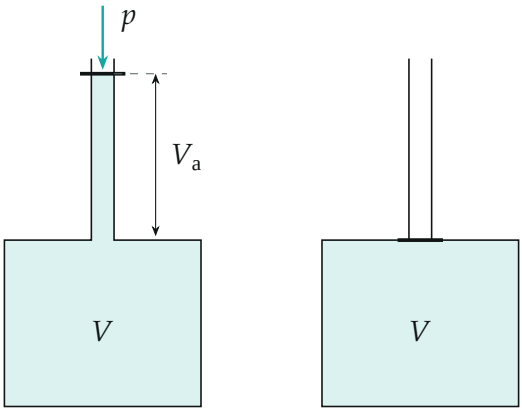
работа атмосферы над системой; Q — теплота, отданная теплообменнику.

1. Сколько воздуха вошло. Уравнение Менделеева — Клапейрона для воздуха в сосуде в начале и в конце (давление всё время p: трубка соединяет сосуд с атмосферой, процесс медленный):

$$\nu_0 = \frac{pV}{RT_0}, \qquad \nu = \frac{pV}{RT} > \nu_0.$$

Вошло $\nu - \nu_0$ молей. Снаружи, при p и T_0, они занимали объём

$$V_\text{a} = \frac{(\nu - \nu_0)RT_0}{p} = V\left(\frac{T_0}{T} - 1\right).$$



в начале: T_0 в конце: T

Система — весь воздух, который в конце окажется в сосуде (бирюзовый). Вначале его часть занимает снаружи объём V_a; атмосфера, как поршень с давлением p, вталкивает её в сосуд (трубка и объём нарисованы условно)

2. Работа атмосферы. Граница системы снаружи движется под постоянным давлением p и проходит объём V_a, поэтому работа внешнего давления над системой

$$A = pV_\text{a} = pV\left(\frac{T_0}{T} - 1\right) > 0.$$

3. Изменение внутренней энергии. Вся система вначале имела температуру T_0, в конце — T; молей в ней ν:

$$\Delta U = \frac{5}{2}\nu R(T - T_0) = \frac{5}{2}\frac{pV}{T}(T - T_0) = -\frac{5}{2}pV\left(\frac{T_0}{T} - 1\right).$$

Знак минус: воздух остыл, внутренняя энергия уменьшилась.

4. Первый закон термодинамики. Для системы постоянной массы: работа над ней внешних сил равна изменению внутренней энергии плюс отданной теплоте, $A = \Delta U + Q$:

$$Q = A - \Delta U = pV\left(\frac{T_0}{T} - 1\right) + \frac{5}{2}pV\left(\frac{T_0}{T} - 1\right) = \frac{7}{2}pV\left(\frac{T_0}{T} - 1\right).$$

$Q > 0$: теплообменник действительно получает теплоту.

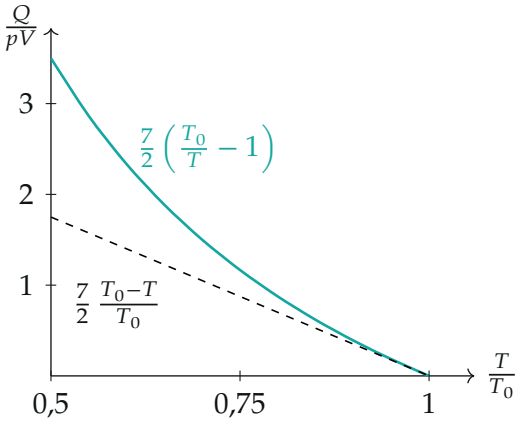


Баланс энергии, $X = pV\left(\frac{T_0}{T} - 1\right)$: теплообменник получает и убыль внутренней энергии, и работу атмосферы; длины стрелок пропорциональны 1 и $\frac{7}{2}$

Второй способ. Для процесса при постоянном давлении теплота равна изменению энтальпии, $Q = \nu C_p \Delta T$ с $C_p = C_V + R = \frac{7}{2}R$. Каждый моль конечного воздуха остыл от T_0 до T:

$$Q = \nu \cdot \frac{7}{2}R\,(T_0 - T) = \frac{7}{2}\frac{pV}{RT}R\,(T_0 - T) = \frac{7}{2}pV\left(\frac{T_0}{T} - 1\right)$$

— тот же ответ.



Отданная теплота в зависимости от конечной температуры (бирюза) и «наивный» ответ $\nu_0 C_p(T_0 - T)$ без учёта вошедшего воздуха (пунктир)

Обратите внимание. Нельзя считать, что охлаждается только начальный воздух ν_0, или что работа равна нулю, раз объём сосуда постоянен: в сосуд входит воздух, и над ним атмосфера совершает работу $pV_\text{а}$. Без неё получился бы ответ $\frac{5}{2}pV\left(\frac{T_0}{T}-1\right)$.

Проверка. Размерность: pV — джоули. Предел $T \to T_0$: $Q \to 0$, охлаждения нет. При малом охлаждении $Q \approx \frac{7}{2}pV\frac{\Delta T}{T_0} = \nu_0 C_p \Delta T$ — обычная формула изобарного процесса.

Ответ. $Q = \dfrac{7}{2}pV\left(\dfrac{T_0}{T}-1\right)$.