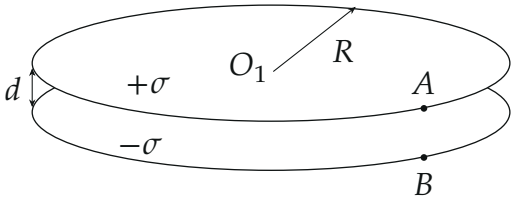
Плоский конденсатор

Задача 3. [ВсОШ 2021/22, региональный этап, 11 класс, задача 3] Две круглые непроводящие пластины радиуса R располагаются параллельно на малом расстоянии d ($d \ll R$) друг от друга, образуя плоский конденсатор. Пластины заряжены равномерно с поверхностными плотностями заряда $+\sigma$ и $-\sigma$. Точки O_1 и O_2 — центры пластин. Точки A и B находятся на краях пластин. Отрезки O_1O_2 и AB перпендикулярны плоскостям пластин. Найдите разности потенциалов между парами точек:

1. O_1 и O_2;
2. A и B;
3. O_1 и A.



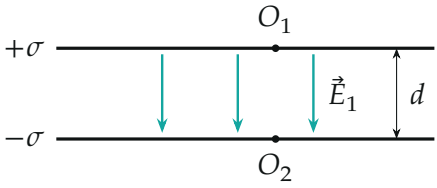
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на принцип суперпозиции и потенциальность электростатического поля. В середине конденсатора поле как у бесконечных плоскостей. У края пластина «обрывается»: зазор мал, и вблизи края пластины выглядят как полуплоскости, а поле полуплоскости находится приёмом «достроить до целой плоскости». Разность потенциалов O_1 и A получим без вычисления поля вдоль пластины: обойдём замкнутый контур O_1ABO_2 и воспользуемся симметрией.

Обозначения. E_1 — поле в зазоре у центров, E_{2n} — нормальная к пластинам составляющая поля на отрезке AB; φ с индексом — потенциал точки.

Пункт 1. Центры пластин. Вблизи центра расстояние до края $R \gg d$, и пластины действуют как бесконечные плоскости. Поле одной плоскости $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, в зазоре поля двух пластин складываются (принцип суперпози-

ции):

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \qquad \varphi_{O_1} - \varphi_{O_2} = E_1 d = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}.$$



Середина конденсатора: однородное поле $E_1 = \sigma/\varepsilon_0$ от $+\sigma$ к $-\sigma$

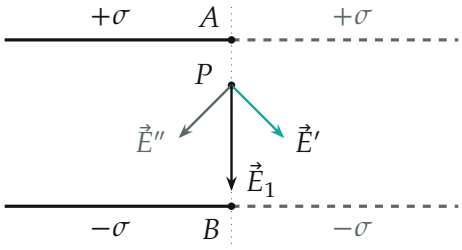
Пункт 2. Края пластин. Вблизи отрезка AB (на расстояниях порядка $d \ll R$) кривизной края можно пренебречь: каждая пластина — полуплоскость. Мысленно достроим обе пластины второй парой полуплоскостей с теми же зарядами ($+\sigma$ и $-\sigma$), продолжающих их за край. Получились две бесконечные плоскости, их поле в зазоре E_1 направлено нормально.

Новая пара — зеркальное отражение старой относительно плоскости, проходящей через AB перпендикулярно пластинам. Поэтому в точках отрезка AB нормальные составляющие поля обеих пар одинаковы, а касательные противоположны (и при сложении уничтожаются). Значит,

$$2E_{2n} = E_1 \quad \Rightarrow \quad E_{2n} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

в любой точке AB. Разность потенциалов — интеграл нормальной составляющей вдоль AB:

$$\varphi_A - \varphi_B = E_{2n} d = \frac{\sigma d}{2\varepsilon_0}.$$



Пластины у края — полуплоскости (чёрные); достроенные зеркальные полуплоскости (пунктир). В точке P отрезка AB поля пар $\vec{E}'$ и $\vec{E}''$ симметричны, их сумма — поле бесконечных плоскостей $\vec{E}_1$; нормальная составляющая каждой — $E_1/2$

Пункт 3. Центр и край. Электростатическое поле потенциально: сумма разностей потенциалов по замкнутому контуру $O_1 \to A \to B \to O_2 \to O_1$ равна нулю:

$$(\varphi_{O_1} - \varphi_A) + (\varphi_A - \varphi_B) + (\varphi_B - \varphi_{O_2}) = \varphi_{O_1} - \varphi_{O_2}.$$

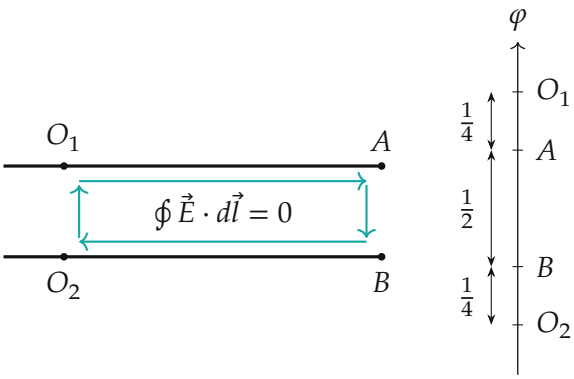
Симметрия: если поменять пластины местами и знаки всех зарядов, система перейдёт сама в себя, а потенциалы сменят знак: $\varphi_{O_1} \leftrightarrow -\varphi_{O_2}$, $\varphi_A \leftrightarrow -\varphi_B$ (потенциал на бесконечности — ноль). Отсюда

$$\varphi_{O_1} - \varphi_A = \varphi_B - \varphi_{O_2}.$$

Подставим в уравнение контура:

$$2(\varphi_{O_1} - \varphi_A) = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma d}{2\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \varphi_{O_1} - \varphi_A = \frac{\sigma d}{4\varepsilon_0}.$$

Знак плюс: центр положительной пластины выше по потенциалу, чем её край.



Контур O_1ABO_2 и потенциалы его вершин в единицах $\sigma d/\varepsilon_0$: $1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

Обратите внимание. Потенциалы центра и края *одной* пластины различаются, хотя пластина заряжена равномерно: она непроводящая, и её поверхность не эквипотенциальна. Вдоль пластины есть касательное поле, особенно у края.

Проверка. Размерность: $\frac{\sigma d}{\varepsilon_0}$ — $\frac{\text{Кл/м}^2\cdot\text{м}}{\text{Кл}^2/(\text{Н}\cdot\text{м}^2)} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{Кл}} = \text{В}$. Второй способ: потенциал отдельного диска в центре $\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}$, на краю $\frac{\sigma R}{\pi\varepsilon_0}$; при сложении дисков $\pm\sigma$ слагаемые порядка σR сокращаются, остаются $\varphi_{O_1} = \frac{\sigma d}{2\varepsilon_0}$ и $\varphi_A = \frac{\sigma d}{4\varepsilon_0}$ — разность $\frac{\sigma d}{4\varepsilon_0}$.

Ответ. 1) $\varphi_{O_1} - \varphi_{O_2} = \dfrac{\sigma d}{\varepsilon_0}$; 2) $\varphi_A - \varphi_B = \dfrac{\sigma d}{2\varepsilon_0}$; 3) $\varphi_{O_1} - \varphi_A = \dfrac{\sigma d}{4\varepsilon_0}$.