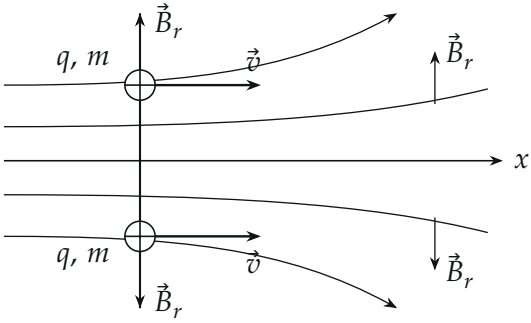
Гантель в магнитном поле

Задача 4. [ВсОШ 2021/22, региональный этап, 11 класс, задача 4] В аксиально-симметричном магнитном поле находится гантель — лёгкий непроводящий стержень с заряженными шариками на концах. Массы и заряды шариков одинаковы и равны m и q. Гантель перпендикулярна оси симметрии (оси x), а её центр находится на этой оси (см. рис.). Проекция магнитного поля на радиальное (перпендикулярное оси) направление на расстоянии, равном радиусу гантели, везде одинакова и равна B_r. Осевая компонента поля изменяется вдоль оси. В момент времени t_0 гантели сообщают скорость v_0 вдоль оси x. Силу тяжести не учитывайте.



1. На какое наибольшее расстояние $L_{\max}$ от начального положения удаляется центр гантели?
2. Чему равна максимальная окружная (перпендикулярная оси симметрии) скорость вращения шариков гантели в процессе движения?
3. Через какое время после t_0 угловая скорость вращения гантели окажется наибольшей?

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на движение зарядов в магнитном поле под действием силы Лоренца. Радиальная составляющая поля при движении вдоль оси даёт силу *по окружности* — гантель начинает вращаться; при вращении та же составляющая даёт силу *вдоль оси* против движения — поступательное движение тормозится. Сила Лоренца

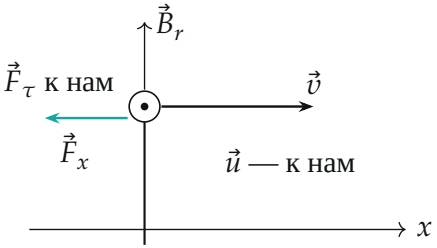
работы не совершает, поэтому кинетическая энергия сохраняется: скорость «перекачивается» из осевой в окружную и обратно. Получатся гармонические колебания центра гантели вдоль оси.

Обозначения. v — осевая скорость шариков (она же скорость центра), u — окружная скорость шариков; x — смещение центра от начального положения; $\omega_c = \dfrac{qB_r}{m}$.

1. Какие силы действуют. Сила Лоренца $\vec{F} = q\,\vec{v}_{\text{ш}} \times \vec{B}$, где скорость шарика $\vec{v}_{\text{ш}}$ складывается из осевой v и окружной u, а поле — из осевой B_x и радиальной B_r.

- $u \times B_x$ — радиальная сила, вдоль стержня; у двух шариков она равна и противоположна и лишь натягивает (сжимает) стержень — на движение центра и вращение не влияет. Поэтому изменение B_x вдоль оси роли не играет.
- $v \times B_r$ — окружная сила qvB_r: она раскручивает гантель.
- $u \times B_r$ — осевая сила quB_r, направленная против v (проверка — ниже по знаку работы).

Обе окружные силы создают момент одного знака (у нижнего шарика и B_r, и направление «по окружности» противоположны верхнему), центр гантели поперёк оси не смещается.



Верхний шарик, вид сбоку: $q\vec{v} \times \vec{B}_r$ направлена к нам (точка в кружке) и раскручивает гантель; при окружной скорости $\vec{u}$ «к нам» сила $q\vec{u} \times \vec{B}_r$ направлена против оси x

2. Уравнения движения. Второй закон Ньютона для шарика в проек-

циях на ось x и на окружное направление:

$$m\frac{dv}{dt} = -quB_r, \qquad m\frac{du}{dt} = qvB_r.$$

Умножим первое на v, второе на u и сложим: $\dfrac{d}{dt}\dfrac{m(v^2+u^2)}{2} = 0$ — сила Лоренца работы не совершает, полная скорость шарика сохраняется:

$$v^2 + u^2 = v_0^2.$$

Пункт 2. Наибольшая окружная скорость. Окружная скорость растёт, пока $v > 0$, и максимальна, когда вся скорость стала окружной, $v = 0$:

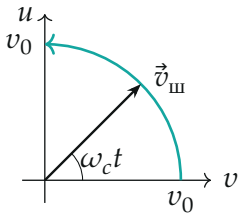
$$u_{\max} = v_0.$$

Пункт 1. Наибольшее удаление. Во втором уравнении $v\,dt = dx$:

$$m\,du = qB_r\,dx \quad \Rightarrow \quad mu = qB_r x$$

(суммируем от начала, где $u = 0$, $x = 0$). Окружная скорость пропорциональна смещению. Наибольшее смещение — в момент $v = 0$, $u = v_0$:

$$L_{\max} = \frac{mu_{\max}}{qB_r} = \frac{mv_0}{qB_r}.$$



Модуль скорости шарика не меняется: конец вектора (v, u) идёт по окружности радиуса v_0

Пункт 3. Когда вращение быстрее всего. Подставим $u = \dfrac{qB_r}{m}x$ в

первое уравнение:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{qB_r}{m}\right)^2 x = -\omega_c^2 x.$$

Это уравнение гармонических колебаний; при $x(t_0) = 0$, $\dot{x}(t_0) = v_0$:

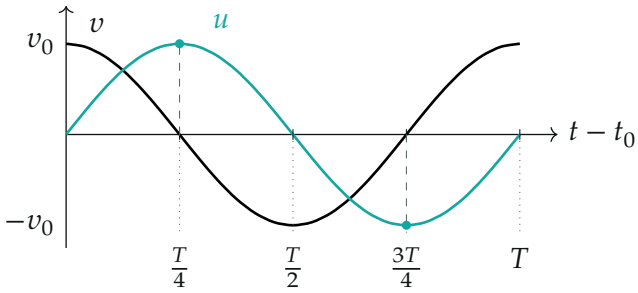
$$x = L_{\max} \sin \omega_c (t - t_0),$$

$$v = v_0 \cos \omega_c (t - t_0), \qquad u = v_0 \sin \omega_c (t - t_0).$$

Угловая скорость $|u|/r$ наибольшая при $|\sin \omega_c (t - t_0)| = 1$ — через четверть периода и далее через каждые полпериода:

$$t - t_0 = \frac{\pi m}{2qB_r}(2n - 1), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Направление вращения при этом чередуется.



Осевая v (чёрный) и окружная u (бирюза) скорости, $T = \frac{2\pi m}{qB_r}$; смещение x повторяет график u в масштабе $L_{\max}/v_0$. Точки — моменты наибольшей угловой скорости

Обратите внимание. Важно, что B_r одинаково на любом расстоянии вдоль оси (на радиусе гантели): иначе связь $mu = qB_r x$ не была бы линейной и колебания не были бы гармоническими. Осевое поле B_x может меняться как угодно — его силы лишь тянут стержень.

Проверка. Размерность: $\frac{mv_0}{qB_r}$ — $\frac{\text{кг} \cdot \text{м/с}}{\text{Кл} \cdot \text{Тл}}$ = м (как радиус ларморов-

ской окружности), $\dfrac{m}{qB_r}$ — секунды. Предел $B_r \to 0$: $L_{\max} \to \infty$ — без поля гантель летит равномерно.

Ответ. 1) $L_{\max} = \dfrac{mv_0}{qB_r}$; 2) $u_{\max} = v_0$; 3) $t_n - t_0 = \dfrac{\pi m}{2qB_r}(2n-1)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ (первый раз — через $\dfrac{\pi m}{2qB_r}$ после t_0).