# Круг Снелла

**Задача 5.** [ВсОШ 2021/22, региональный этап, 11 класс, задача 5] «Круг Снелла».

Говорят, что в архиве Снеллиуса нашли чертёж оптической схемы, на которой были изображены тонкая собирающая линза, круг и его изображение в линзе. От времени чернила выцвели, и на чертеже остались видны лишь круг и его изображение, но известно, что круг целиком располагался в плоскости, проходящей через главную оптическую ось линзы, и что круг и его изображение располагались по разные стороны от плоскости линзы.

Пользуясь только циркулем и линейкой без делений, восстановите положения:

1. оптического центра $O$ линзы;
2. плоскости линзы;
3. фокусов $F_1$ и $F_2$ линзы.



*Примечание.* Чертёж приведён на дополнительном листе в увеличенном масштабе; все построения выполняйте на нём. Описывать построение параллельных и перпендикулярных прямых, проходящих через заданную точку, деление отрезка пополам и подобные стандартные геометрические процедуры не обязательно.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на построение в геометрической оптике. Работают три свойства тонкой линзы: точка и её изображение лежат на одной прямой с оптическим центром; прямая и её изображение пересекаются на плоскости линзы; луч, параллельный главной оптической оси, после линзы проходит через фокус. Из первого свойства найдём $O$, из второго — плоскость линзы, из третьего — фокусы.

**Обозначения.** $A$, $M$ — точки касания общих внутренних касательных с кругом, $B$, $N$ — с изображением; $P$ — точка пересечения прямых $AM$ и $BN$; $L$ и $K$ — точки, где прямые через $M$ и $N$, параллельные главной оси, пересекают плоскость линзы.

**1. Оптический центр.** Луч через оптический центр тонкой линзы не преломляется, поэтому любая точка $S$ круга и её изображение $S^*$ лежат на одной прямой с $O$. Возьмём прямую через $O$, которая касается круга. На ней лежит ровно одна точка круга, значит, и ровно одна точка изображения: если бы прямая пересекала изображение в двух точках, их прообразы — две точки круга на той же прямой. Прямая через $O$, касательная к кругу, касается и изображения.

Таких прямых две. Круг и изображение лежат по разные стороны от линзы, а $O$ — на линзе, то есть между ними: обе прямые проходят между фигурами и пересекаются. Это общие *внутренние* касательные $AB$ и $MN$, а их точка пересечения и есть $O$ (рис. 2). Точка касания переходит в точку касания: $A \to B$, $M \to N$.

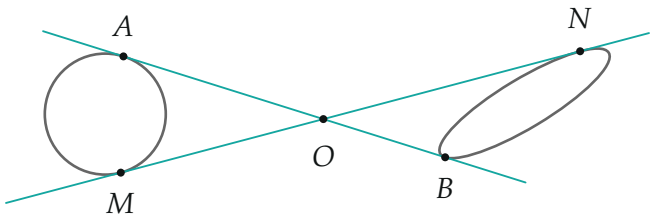


*Рис. 2. Общие внутренние касательные к кругу и изображению пересекаются в оптическом центре $O$; точки касания $A$ и $M$ переходят в $B$ и $N$.*

**2. Плоскость линзы.** Прямая $AM$ проходит через точки круга $A$ и $M$. Её изображение — тоже прямая, и она проходит через изображения этих точек $B$ и $N$, то есть это прямая $BN$. Предмет-прямая и её изображение пересекаются на плоскости линзы: луч, идущий вдоль $AM$, в точке падения на линзу переходит в преломлённый луч, идущий вдоль $BN$. Значит, точка $P = AM \cap BN$ лежит в плоскости линзы, и плоскость линзы — прямая $OP$ (рис. 3).

Главная оптическая ось — перпендикуляр к $OP$, восставленный в точке $O$.

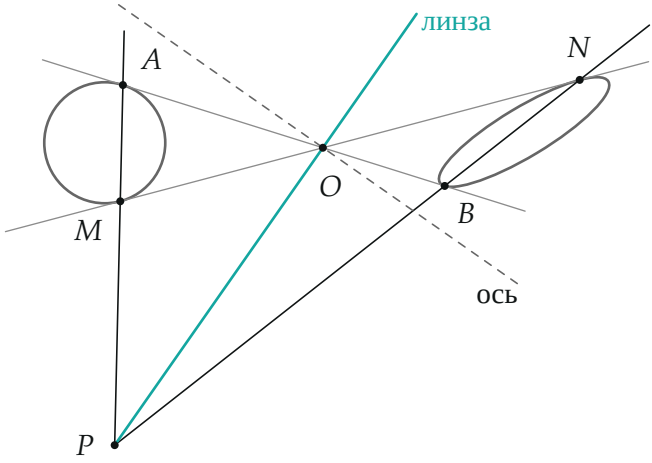


*Рис. 3. Прямая $AM$ и её изображение $BN$ пересекаются в точке $P$ на плоскости линзы; линза — прямая $OP$, ось — перпендикуляр к ней в $O$.*

**3. Фокусы.** Пустим из точки $M$ два «удобных» луча; оба после линзы придут в её изображение $N$ (рис. 4).

- Луч $ML$, параллельный главной оси, после линзы проходит через задний фокус. Он же идёт в $N$, поэтому задний фокус $F_2$ — пересечение прямой $LN$ с осью.
- Луч, вышедший из $M$ через передний фокус, после линзы идёт параллельно оси и тоже приходит в $N$. Проведём через $N$ прямую, параллельную оси, до линзы — точка $K$. Передний фокус $F_1$ — пересечение прямой $MK$ с осью.

Обе точки строятся только линейкой и угольником (параллель — стандартное построение).

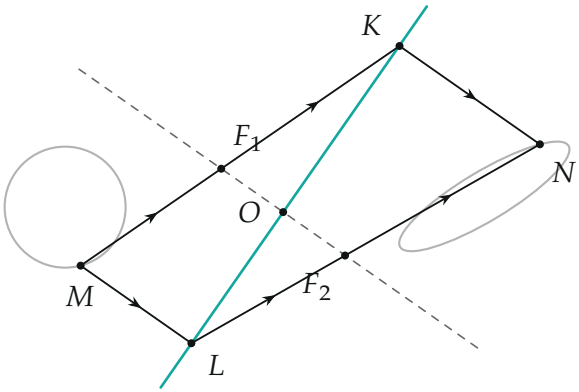


*Рис. 4. Два луча из $M$ сходятся в изображении $N$: параллельный оси идёт через задний фокус $F_2$, идущий через передний фокус $F_1$ выходит параллельно оси.*

**4. Проверка построения.** Чтобы убедиться, что построение верное, мы задали линзу с фокусным расстоянием $F$, круг радиусом $0{,}8F$ с центром на расстоянии $2{,}4F$ перед линзой и $1{,}6F$ от оси и численно (python) построили изображение каждой точки круга по формуле тонкой линзы — получился эллипс рис. 2–4. Пересечение касательных совпало с центром линзы, точка $P$ легла на линзу, а $F_1$ и $F_2$ — ровно на расстояние $F$ от $O$. Весь круг лежит дальше переднего фокуса, всё изображение — дальше заднего: фокальные плоскости проходят между кругом и изображением (рис. 5).

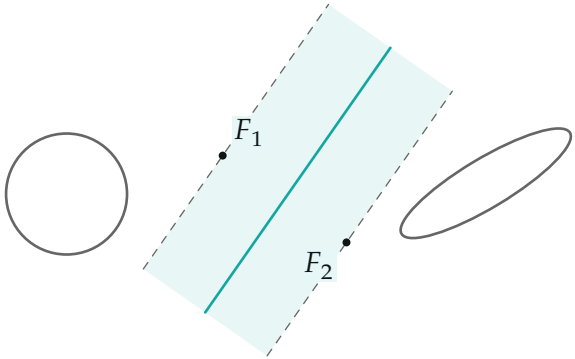


*Рис. 5. Фокальные плоскости (пунктир) лежат между кругом и его изображением: каждая точка круга дальше фокуса, поэтому изображение целиком*

*действительное и замкнутое.*

**Обратите внимание.** Касательные нужны именно внутренние: внешние общие касательные через $O$ не проходят. И в задаче важно, что круг и изображение по разные стороны линзы: изображение действительное, а будь часть круга ближе фокуса, «изображение» распалось бы на действительную и мнимую части и не было бы замкнутой кривой.

**Проверка.** Числовой пример (шаг 4) воспроизводит все три построения. Частный случай: круг с центром на оси даёт изображение, симметричное относительно оси, — тогда $AM$ и $BN$ параллельны плоскости линзы, точка $P$ уходит на бесконечность, и плоскость линзы — прямая через $O$, параллельная $AM$; построение остаётся верным в пределе.

**Ответ.** 1) $O$ — точка пересечения общих внутренних касательных $AB$ и $MN$ к кругу и изображению; 2) плоскость линзы — прямая $OP$, где $P$ — точка пересечения прямых $AM$ и $BN$ (главная ось — перпендикуляр к $OP$ в точке $O$); 3) $F_2$ — пересечение оси с прямой $LN$, $F_1$ — с прямой $MK$, где $L$ и $K$ — точки линзы, в которые приходят прямые через $M$ и $N$, параллельные оси.