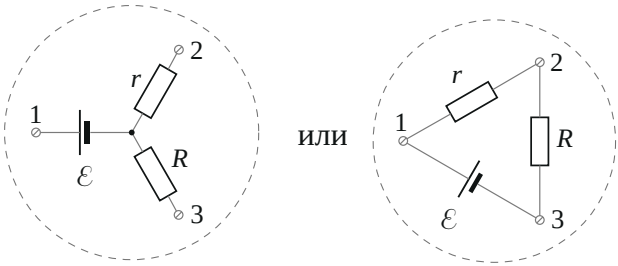
«Серый» ящик

Задача 1. [ВсОШ 2021/22, региональный этап, 9 класс, практический тур, задача 1] Ящик с тремя выводами содержит источник постоянного напряжения $\mathcal{E}$ и два резистора. Указанные элементы соединены по одной из двух схем, представленных на рис. 1.



«Звезда» «Треугольник»

Рис. 1

На крышке ящика выводы в произвольном порядке помечены буквами A, B и C (см. фото). Внутреннее сопротивление источника пренебрежимо мало по сравнению с сопротивлениями резисторов r и R.



1. Установите, по какой из схем («звезда» или «треугольник») соединены элементы.
2. Установите соответствие между точками «1», «2», «3» и выводами A, B и C, считая, что $r < R$.
3. Определите значение напряжения $\mathcal{E}$ источника и сопротивления резисторов r и R.

4. Оцените погрешности результатов.

Оборудование: «серый» ящик, мультиметр со щупами.

Внимание! 1) В начале решения обязательно укажите номер «серого» ящика (на фото это № 36). 2) Запрещается закорачивать выводы ящика (например, с помощью проводов мультиметра, его щупа и т. д.). 3) Внутреннее сопротивление мультиметра в режиме измерения напряжения может существенно отличаться от стандартного для данного прибора.

▲ **Решение. Что происходит.** Это «чёрный ящик» с источником: внутрь заглянуть нельзя, но можно мерить напряжение и ток между парами выводов. Главная трудность — сопротивления резисторов сотни килоом, сравнимые с сопротивлением самого вольтметра R_V, поэтому вольтметр «садит» источник и показывает меньше $\mathcal{E}$. Ток же микроамперметр меряет почти без искажений (его сопротивление — около килоома, ничтожно по сравнению с r, R). Из двух напряжений и двух токов найдём три неизвестных $\mathcal{E}$, r, R, а заодно и четвёртое — R_V.

Обозначения. U_{XY} — показание вольтметра между выводами X и Y; I_{XY} — показание микроамперметра; R_V — сопротивление мультиметра в режиме вольтметра. Числа ниже — измерения авторов задачи на их установке.

1. Измерения напряжений:

$$U_{AB} = 0{,}00\ \text{В}, \qquad U_{AC} = 12{,}73\ \text{В}, \qquad U_{BC} = 6{,}82\ \text{В}.$$

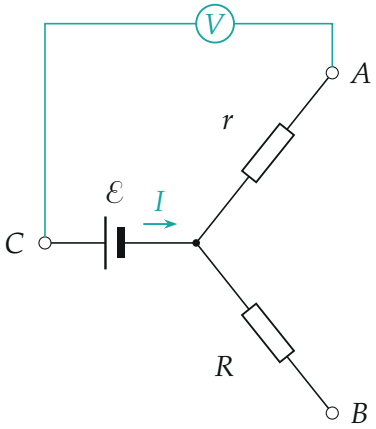
Пункт 1. Звезда или треугольник. Предположим «треугольник». Нулевое U_{AB} возможно, только если между A и B стоит резистор почти без сопротивления; тогда выводы A и B — практически одна точка, и напряжения U_{AC} и U_{BC} должны совпасть. Они различаются почти вдвое — противоречие. Значит, «звезда». Проверим, что «звезда» объясняет нуль: если источник стоит в луче к выводу C, то между A и B только два резистора без источника, тока нет и $U_{AB} = 0$.

Пункт 2. Какой вывод какой. Источник — в луче вывода C: $C \to 1$. Вольтметр между C и любым другим выводом образует с источником

последовательную цепь «$\mathcal{E}$ — резистор — R_V»; закон Ома для неё:

$$U = \frac{\mathcal{E} R_V}{R_V + R_{\text{луча}}}.$$

Чем меньше сопротивление луча, тем больше показание. $U_{AC} > U_{BC}$, значит, к A подключён меньший резистор r: $A \to 2$, $B \to 3$.



Найденная схема «звезда» и измерение U_{AC}: ток идёт по цепи $\mathcal{E} \to r \to R_V$; резистор R тока не проводит

2. Почему вольтметра мало. Если бы $R_V \gg r, R$, оба показания были бы равны $\mathcal{E}$. Они разные, значит, R_V сравнимо с r и R, и одного вольтметра недостаточно. Омметр между A и B (там $r + R$) зашкаливает даже на пределе 2 МОм: $r + R > 2$ МОм. Поэтому меряем токи.

3. Измерения токов (микроамперметр, предел 200 мкА, приборы серии 830):

$$I_{AB} = 0, \qquad I_{AC} = 37{,}7 \text{ мкА}, \qquad I_{BC} = 10{,}6 \text{ мкА}.$$

Сопротивление микроамперметра ничтожно, поэтому по закону Ома для цепи «источник — резистор луча»:

$$\mathcal{E} = I_{AC}\, r = I_{BC}\, R.$$

Пункт 3. Расчёт. Неизвестных четыре: $\mathcal{E}$, r, R, R_V; уравнений четыре (два напряжения, два тока). Отношение токов даёт отношение сопротивлений:

$$\frac{R}{r} = \frac{I_{AC}}{I_{BC}} = \frac{37{,}7}{10{,}6} = 3{,}56.$$

Отношение напряжений (из формулы пункта 2, $\mathcal{E}$ сокращается):

$$\frac{U_{AC}}{U_{BC}} = \frac{R_V + R}{R_V + r} = \frac{12{,}73}{6{,}82} = 1{,}87.$$

Обозначим $x = \frac{r}{R_V}$ и поделим числитель и знаменатель на R_V: $\frac{1+3{,}56x}{1+x} = 1{,}87$, откуда

$$x = \frac{1{,}87 - 1}{3{,}56 - 1{,}87} = 0{,}513.$$

Теперь из напряжения $U_{AC} = \frac{\mathcal{E}}{1+x}$:

$$\mathcal{E} = U_{AC}(1 + x) = 12{,}73 \cdot 1{,}513 \approx 19{,}3 \text{ В},$$

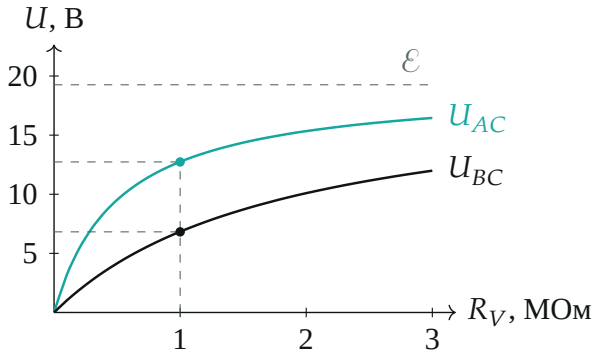
$$r = \frac{\mathcal{E}}{I_{AC}} = \frac{19{,}3 \text{ В}}{37{,}7 \text{ мкА}} \approx 511 \text{ кОм},$$

$$R = \frac{\mathcal{E}}{I_{BC}} = \frac{19{,}3 \text{ В}}{10{,}6 \text{ мкА}} \approx 1{,}82 \text{ МОм}.$$

Попутно $R_V = \frac{r}{x} \approx 1{,}0$ МОм — обычное входное сопротивление дешёвого мультиметра, в десять раз меньше «стандартных» 10 МОм (о чём и предупреждает условие).

Общие формулы, если записать то же без промежуточных чисел:

$$\mathcal{E} = \frac{U_{AC}U_{BC}(I_{AC} - I_{BC})}{I_{AC}U_{BC} - I_{BC}U_{AC}}, \qquad r = \frac{\mathcal{E}}{I_{AC}}, \qquad R = \frac{\mathcal{E}}{I_{BC}}.$$



Показания вольтметра в зависимости от его сопротивления (посчитано при найденных $\mathcal{E}$, r, R). Измеренные 12,73 В и 6,82 В (точки) получаются при одном и том же $R_V \approx 1{,}0$ МОм — система уравнений согласована

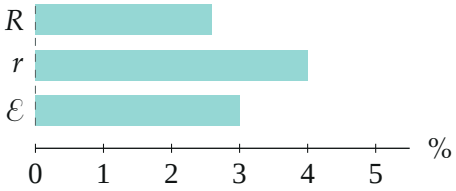
Если предел микроамперметра 2000 **мкА** (серии 832, 838): $I_{AC} = 38$ мкА, $I_{BC} = 11$ мкА, $\frac{R}{r} = 3{,}45$, $x = 0{,}546$, $\mathcal{E} = 12{,}73 \cdot 1{,}546 \approx 19{,}7$ В, $r \approx 518$ кОм, $R \approx 1{,}79$ МОм. Токи здесь известны лишь до целых микроампер, отсюда и разница с первым вариантом.

Пункт 4. Погрешности. Приборные погрешности мультиметра: напряжение — около 0,5%, ток — около 1%. Найдём, как каждая из них сдвигает результат: изменим одно измерение на его погрешность и пересчитаем по общим формулам (расчёт на python):

	$\delta\mathcal{E}$	δr	δR
U_{AC} (0,5%)	1,1%	1,1%	1,1%
U_{BC} (0,5%)	0,5%	0,5%	0,5%
I_{AC} (1%)	0,7%	1,7%	0,7%
I_{BC} (1%)	0,7%	0,7%	0,3%
сумма	3%	4%	2,6%

Погрешности напряжений «усиливаются» в 2 раза: x находится из разности близких чисел $1{,}87 - 1$. Итог (вариант 1):

$$\mathcal{E} = (19{,}3 \pm 0{,}6)\text{ В}, \qquad r = (510 \pm 20)\text{ кОм}, \qquad R = (1{,}82 \pm 0{,}05)\text{ МОм}.$$



Относительные погрешности результатов (сумма вкладов из таблицы); длины полос — по величине

Обратите внимание. Вольтметр с $R_V \approx 1$ МОм на таких резисторах показывает не ЭДС, а 65% и 35% от неё. Принять U_{AC} за $\mathcal{E}$ — ошибка в полтора раза.

Проверка. Прямые измерения авторов на той же установке: $\mathcal{E} = 19{,}2$ В, $r = 507$ кОм, $R = 1{,}80$ МОм — в пределах найденных погрешностей. Найденное $R_V \approx 1$ МОм одинаково для обеих пар выводов (рисунок с графиком), то есть модель «звезды» с вольтметром конечного сопротивления описывает все четыре измерения.

Ответ. 1) «звезда»; 2) $C \to 1$, $A \to 2$, $B \to 3$; 3) на установке авторов (прибор серии 830) $\mathcal{E} \approx 19{,}3$ В, $r \approx 510$ кОм, $R \approx 1{,}82$ МОм (с прибором серий 832/838 — 19,7 В, 520 кОм, 1,79 МОм); 4) $\varepsilon_{\mathcal{E}} \approx 3\%$, $\varepsilon_r \approx 4\%$, $\varepsilon_R \approx 3\%$.