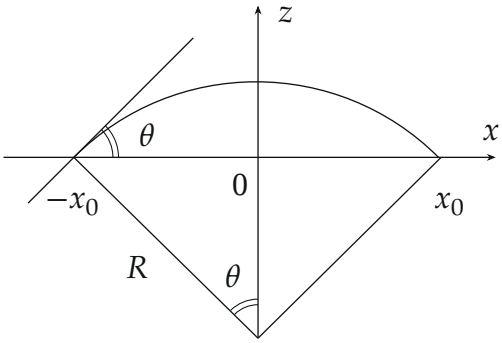
Капля на стекле

Задача 2. [ВсОШ 2021/22, региональный этап, 9 класс, практический тур, задача 2] Маленькая капля жидкости на плоской поверхности принимает форму шарового сегмента (см. рис.). Диаметр d ($d = 2x_0$) капли зависит от объёма $V_в$ жидкости в капле и угла θ. При увеличении объёма капли её поверхность перестаёт быть сферической и становится более плоской. Критерием того, что капля действительно представляет собой шаровой сегмент, является линейная зависимость её объёма от куба диаметра

$$V_в = k\,d^3. \qquad (1)$$

В данной работе вам предстоит определить коэффициент пропорциональности k для капли воды на стекле и оценить угол θ.





1. Определите объём $V_к$ одной капельки воды, отрывающейся от иголки шприца (см. фото) при медленном движении поршня.
2. Подготовьте поверхность стекла. Для этого нанесите на неё несколько капелек воды и тщательно протрите поверхность бумажной салфеткой до полного удаления следов жидкости. Дайте возможность испариться невидимым остаткам воды в течение 1–2 минут.
3. Используя миллиметровую бумагу и увеличительное стекло, снимите зависимость диаметра капли на стекле d от её объёма $V_в$. Для этого вам достаточно изменять объём капли от $V_к$ до $10\,V_к$.
4. Постройте график зависимости $V_в = k\,d^3$. Укажите на нём абсолютные погрешности измеренных величин. Определите значение коэффициента k и оцените его погрешность.
5. С помощью приведённой таблицы постройте график зависимости угла θ от коэффициента k. Определите угол θ_0, соответствующий условиям вашего эксперимента, и оцените его погрешность.

k, 10^{-3}	0,0	17,8	53,5	82,7
θ, град	0,0	10	30	44

k, 10^{-3}	102,3	128,3	147,2	168,7
θ, град	52	61	66	72

Внимание! Будьте крайне осторожны при работе с иглами. Они острые, и вы можете себя травмировать! После окончания работы с иглой помещайте её в защитный колпачок!

Оборудование: предметное стекло, шприц, увеличительное стекло, лист миллиметровой бумаги, стакан с водой, бумажные салфетки — 3 шт.

▲ **Решение. Что происходит.** Капля мала, поверхностное натяжение сильнее тяжести, и она — кусок шара с краевым углом θ, который задаётся только парой «вода — стекло». Все такие капли подобны друг другу, поэтому объём пропорционален кубу размера: $V = kd^3$, и коэффициент k зависит лишь от θ. План опыта: «единица объёма» — одна капелька из иглы (пункт 1); капля на стекле из n капелек имеет объём $nV_к$; меряем её диаметр; наклон прямой $V(d^3)$ даёт k, а таблица — угол.

Числа ниже — измерения авторов задачи.

Обозначения. N — число вытекших капелек; n — число капелек в капле на стекле; Δ — абсолютная погрешность, ε — относительная.

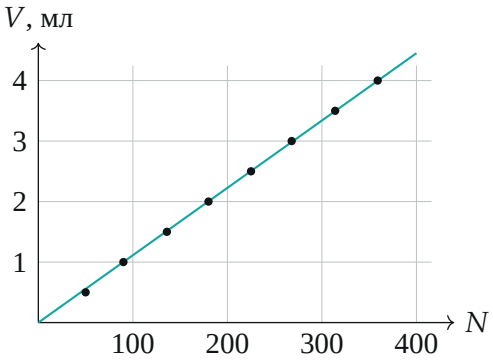
Пункт 1. Объём капельки. Объём одной капли мал, мерить его по одной нельзя. Поэтому выдавливаем воду из вертикального шприца медленно, считаем капли и по шкале шприца читаем вытекший объём; зависимость $V = V_к N$ — прямая через начало, $V_к$ — её наклон:

N	50	90	136	180	225	268	314	359
V, мл	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0

Метод наименьших квадратов для прямой через начало: $V_к = \frac{\sum N_i V_i}{\sum N_i^2}$ (расчёт на python):

$$V_к = 11{,}1 \cdot 10^{-3} \text{ мл}.$$

Погрешность: шкала шприца — 0,1 мл на 4 мл, то есть около 2%; разброс точек около прямой меньше. Итак $V_к = (11{,}1 \pm 0{,}2) \cdot 10^{-3}$ мл.

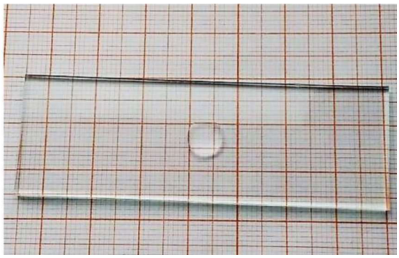


Объём вытекшей воды от числа капель; прямая $V = V_к N$ с $V_к = 11{,}1 \cdot 10^{-3}$ мл

Пункт 2. Подготовка стекла. Чистое и сухое стекло нужно для того, чтобы угол θ был одним и тем же для всех капель: следы жира или воды меняют смачивание, и капли разного объёма перестанут быть подобны.

Пункт 3. Диаметр от объёма. Кладём стекло на миллиметровую бумагу и капаем в одно место $n = 1, 2, \ldots, 10$ капелек, после каждой меря-

ем диаметр через лупу. Новая капелька не должна касаться стекла рядом с большой каплей, иначе объём будет не $nV_к$.



Капля на стекле над миллиметровой бумагой

Диаметр по миллиметровой бумаге известен с точностью до половины деления: $\Delta d = 0{,}5$ мм. Относительная погрешность куба втрое больше относительной погрешности диаметра:

$$\varepsilon_{d^3} = 3\varepsilon_d = \frac{3\Delta d}{d}, \qquad \Delta(d^3) = \varepsilon_{d^3}\, d^3.$$

n	1	2	3	4	5
d, мм	6,5	8	9,25	10,25	10,25
d^3, см^3	0,27	0,51	0,79	1,08	1,08
$\Delta(d^3)$, см^3	0,06	0,10	0,13	0,16	0,16

n	6	7	8	9	10
d, мм	11	12	12	13	13
d^3, см^3	1,33	1,73	1,73	2,20	2,20
$\Delta(d^3)$, см^3	0,18	0,22	0,22	0,25	0,25

Объём капли $V_в = nV_к$; его погрешность (2%) мала по сравнению с погрешностью d^3 (12–23%), поэтому на графике рисуем только горизонтальные «усы».

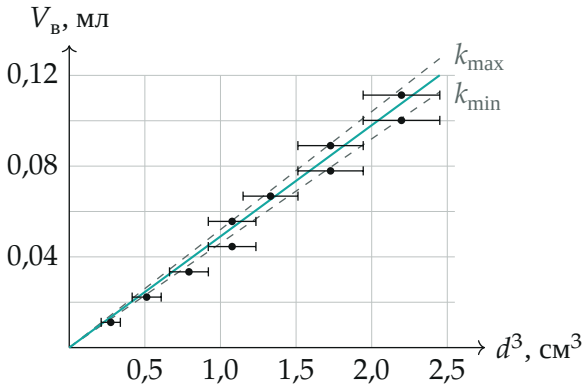
Пункт 4. Коэффициент k. Строим $V_в$ от d^3. Точки в пределах погрешностей лежат на прямой через начало координат — значит, капли действительно подобные шаровые сегменты. Через начало и «усы» проводим прямые с наибольшим и наименьшим наклоном, ещё проходящие

через все «усы»:

$$k_{\min} = 0{,}046, \qquad k_{\max} = 0{,}052,$$

$$k = \frac{k_{\max} + k_{\min}}{2} \pm \frac{k_{\max} - k_{\min}}{2} = (49 \pm 3) \cdot 10^{-3}.$$

Метод наименьших квадратов (прямая через начало, python) даёт $k = (47{,}9 \pm 1{,}1) \cdot 10^{-3}$ — в пределах этой оценки.

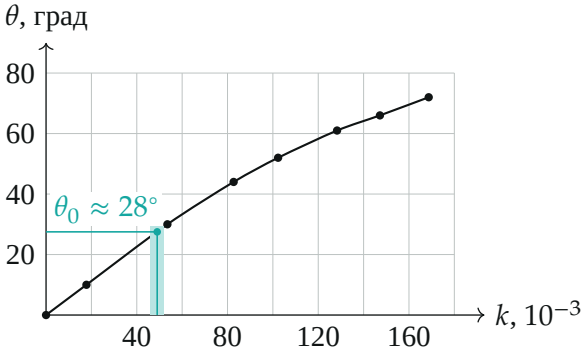


$V_в$ от d^3 с погрешностями $\Delta(d^3)$; бирюзой — прямая $k = 0{,}049$, штрихами — крайние прямые $k_{\min} = 0{,}046$ и $k_{\max} = 0{,}052$

Пункт 5. Угол θ_0. Строим по таблице условия график $\theta(k)$ и проводим через точки плавную кривую. По ней читаем угол для $k = 0{,}049$ и для краёв интервала 0,046 и 0,052 (линейная интерполяция между точками 17,8 и 53,5, python):

$$\theta(0{,}046) = 25{,}8°, \qquad \theta(0{,}049) = 27{,}5°, \qquad \theta(0{,}052) = 29{,}2°,$$

$$\theta_0 = (28 \pm 2)°.$$



Угол смачивания от k по таблице условия; бирюзой — отсчёт для $k = 0{,}049$, полоса — интервал $k_{\min} \ldots k_{\max}$

Второй способ для угла. Для шарового сегмента с краевым углом θ и радиусом основания $x_0 = \frac{d}{2}$ геометрия даёт

$$k = \frac{V}{d^3} = \frac{\pi\left(2 - 3\cos\theta + \cos^3\theta\right)}{24\sin^3\theta}.$$

При $\theta = 28°$ это 0,050, при $\theta = 10°$ и $30°$ — 0,017 и 0,054, как в таблице условия. Угол по формуле для $k = 0{,}049$ — 27,5°, совпадает с графиком.

Обратите внимание. Главная погрешность опыта — диаметр: полмиллиметра на капле в 6–13 мм дают 12–23% в d^3. Поэтому важны большие капли (до $10V_к$), но не слишком большие — иначе тяжесть сплющит каплю и точки уйдут вниз от прямой.

Проверка. Размерность: $k = \frac{V}{d^3}$ безразмерно, $\frac{\text{мл}}{\text{см}^3} = 1$. Смысл: $\theta \approx 28°$ — вода хорошо смачивает чистое стекло (капля плоская, $\theta < 90°$), капля заметно площе полушара.

Ответ. $V_к \approx 11{,}1 \cdot 10^{-3}$ мл; $k = (49 \pm 3) \cdot 10^{-3}$; $\theta_0 = (28 \pm 2)°$ (по измерениям авторов).