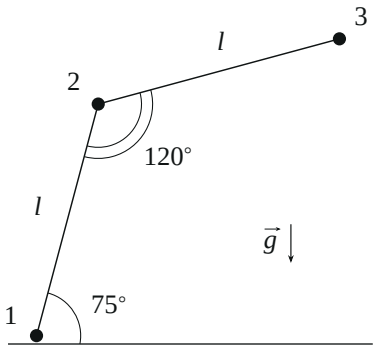
Три ракеты

Задача 1. [ВсОШ 2021/22, региональный этап, 9 класс, задача 1] Из точки, находящейся на высоте h над поверхностью земли под разными углами к горизонту с одинаковыми скоростями v_0 одновременно разлетаются три осколка фейерверка. Векторы их скоростей лежат в одной вертикальной плоскости. Через время $\tau = 1{,}0$ с после вылета осколки взрываются. Вспышка первого происходит у самой поверхности земли, вспышка второго — на расстоянии $l = 10$ м от первого, а вспышка третьего — на таком же расстоянии l от второго. Отрезок, соединяющий две первые вспышки, составляет угол $75°$ с горизонтом, а отрезок, соединяющий вторую и третью вспышку, составляет угол $120°$ с первым отрезком, как показано на рисунке. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите:



1. начальные скорости v_0 осколков;
2. углы с горизонтом, под которыми были направлены векторы начальных скоростей каждого из осколков;
3. высоту h, на которой разорвался фейерверк.

Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Все три осколка летят с одним и тем же ускорением $\vec{g}$. Главная идея задачи — перейти в систему отсчёта, которая свободно падает с ускорением $\vec{g}$ и в момент взрыва покоится. Ускорение осколков относительно неё равно нулю, поэтому там каждый осколок летит по прямой с постоянной скоростью $\vec{v}_0$, и за одно и то же время

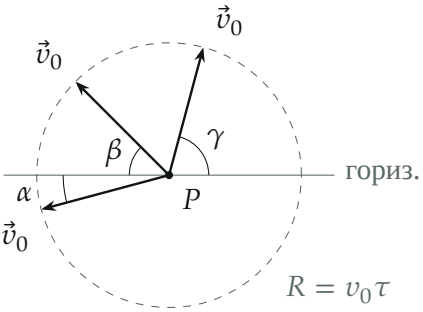
τ все три уходят от точки взрыва на одно и то же расстояние $v_0\tau$. Значит, три вспышки лежат на окружности радиуса $v_0\tau$, а дальше задача становится геометрической.

Обозначения. P — точка взрыва фейерверка; O — положение точки P падающей системы через время τ; $1, 2, 3$ — вспышки; $R = v_0\tau$; α, β, γ — углы скоростей осколков $1, 2, 3$ с горизонтом.

1. Где вспышки в падающей системе. Запишем закон движения осколка в системе Земли (ось y вверх, начало в P):

$$\vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}.$$

Второе слагаемое одинаково для всех осколков: это смещение самой падающей системы. Относительно неё осколок смещается на $\vec{v}_0 t$ — по прямой вдоль начальной скорости. При $t = \tau$ все три относительных смещения имеют одну длину $R = v_0\tau$ и направлены вдоль начальных скоростей.



Падающая система отсчёта: осколки летят по прямым с одинаковыми скоростями, к моменту τ они на окружности радиуса $R = v_0\tau$

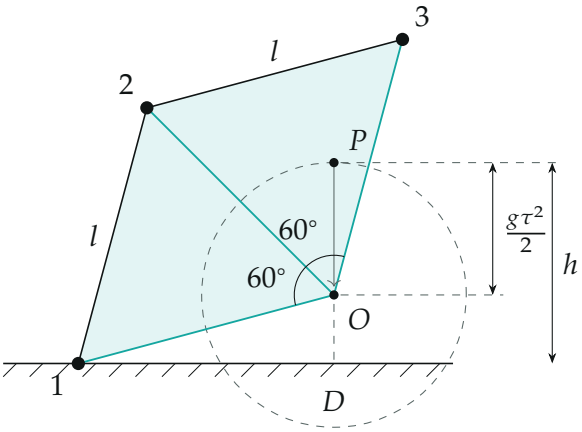
2. Где вспышки в системе Земли. К каждому относительному смещению добавляется одно и то же смещение падающей системы $\frac{g\tau^2}{2}$ вниз. Вся окружность целиком сдвигается вниз на

$$\Delta h = \frac{g\tau^2}{2} = \frac{10 \cdot 1^2}{2} = 5 \text{ м}.$$

Её центр O лежит на Δh ниже точки взрыва P, радиус прежний: $O1 = O2 = O3 = R$.

3. Радиус окружности и скорость (пункт 1). Точки 1, 2, 3 лежат на окружности с центром O. Вписанный угол $\angle 123 = 120^\circ$ опирается на дугу 1 3, не содержащую точку 2; эта дуга равна $2 \cdot 120^\circ = 240^\circ$. На дуги 1 2 и 2 3 вместе остаётся $360^\circ - 240^\circ = 120^\circ$, а хорды 12 и 23 равны, поэтому каждая дуга — по 60°. Треугольники $O12$ и $O23$ — равнобедренные с углом 60° при вершине O, то есть равносторонние:

$$R = l = 10\ \text{м}, \qquad v_0 = \frac{R}{\tau} = \frac{l}{\tau} = \frac{10}{1{,}0} = 10\ \text{м/с}.$$



Система Земли: окружность вспышек сдвинута вниз на $\frac{g\tau^2}{2}$; треугольники $O12$ и $O23$ равносторонние

4. Направления скоростей (пункт 2). Направление начальной скорости осколка совпадает с направлением радиуса из O в точку его вспышки (пункт 1: относительное смещение $\vec{v}_0\tau$). Найдём углы этих радиусов с горизонтом.

Хорда $1 \to 2$ наклонена под 75°, а радиус $O1$ повёрнут относительно неё на угол равностороннего треугольника 60° (точка O правее хорды, со стороны точки 3). Из точки 1 на центр O смотрим под углом $75^\circ - 60^\circ = 15^\circ$ к горизонту вверх, значит, радиус $O \to 1$ направлен под $\alpha = 15^\circ$ *вниз* от горизонтали, влево.

Радиус $O \to 2$ повёрнут от $O \to 1$ на центральный угол $60°$ вверх: $180° + 15° - 60° = 135°$ от направления вправо, то есть под $\beta = 45°$ вверх, влево.

Радиус $O \to 3$ повёрнут ещё на $60°$: $135° - 60° = 75°$, то есть $\gamma = 75°$ вверх, вправо.

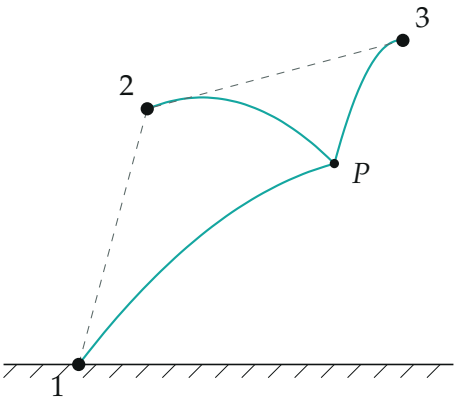
Проверим вторым способом через векторы: $\vec{O2} = \vec{O1} + \vec{12}$, $\vec{O1} = l(-\cos 15°, -\sin 15°)$, $\vec{12} = l(\cos 75°, \sin 75°)$; сумма $l(-0{,}707;\ 0{,}707)$ — ровно $45°$ к горизонту.

5. Высота (пункт 3). Точка 1 на земле, поэтому центр O выше земли на вертикальную проекцию радиуса $O1$:

$$OD = l\sin\alpha = l\sin 15° \approx 10 \cdot 0{,}259 = 2{,}59 \text{ м}.$$

Точка взрыва P выше O на $\frac{g\tau^2}{2}$:

$$h = l\sin 15° + \frac{g\tau^2}{2} \approx 2{,}59 + 5 = 7{,}6 \text{ м}.$$



Настоящие траектории осколков в системе Земли (посчитаны для $v_0 = 10$ м/с, $h = 7{,}6$ м): параболы из точки P в точки вспышек

Обратите внимание. Углы $15°$, $45°$, $75°$ — это углы с горизонтом, но направления разные: первый осколок летит под $15°$ *вниз* влево, второй

— под 45° вверх влево, третий — под 75° вверх вправо. Хорды 12 и 23 на рисунке условия — не траектории: настоящие траектории — параболы.

Проверка. Подставим ответ в закон движения первого осколка: по вертикали $h - v_0 \sin 15^\circ\,\tau - \frac{g\tau^2}{2} = 7{,}59 - 2{,}59 - 5 = 0$ — он действительно у земли. Горизонтальное расстояние между вспышками 1 и 2: $v_0\tau(\cos 15^\circ - \cos 45^\circ) = 10 \cdot 0{,}259 = 2{,}59$ м, вертикальное $v_0\tau(\sin 45^\circ + \sin 15^\circ) = 9{,}66$ м; длина $\sqrt{2{,}59^2 + 9{,}66^2} = 10$ м $= l$, наклон $\operatorname{arctg}(9{,}66/2{,}59) = 75^\circ$ — как в условии. Смысл: в падающей системе взрыв выглядит как расширяющаяся сфера, а гравитация лишь сносит её целиком вниз.

Ответ. 1) $v_0 = \dfrac{l}{\tau} = 10$ м/с; 2) 15° (вниз), 45° и 75° (вверх) к горизонту; 3) $h = l\sin 15^\circ + \dfrac{g\tau^2}{2} \approx 7{,}6$ м.