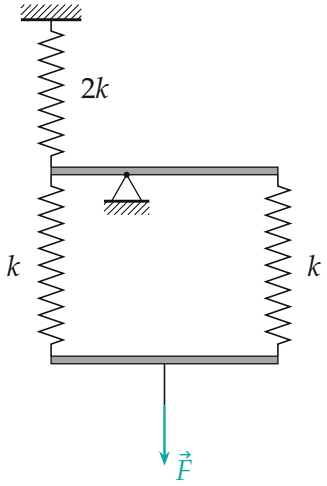
Пружины

Задача 2. [ВсОШ 2021/22, региональный этап, 9 класс, задача 2] Система состоит из трёх лёгких пружин и двух лёгких стержней. Коэффициенты жёсткости пружин указаны на рисунке. Верхний стержень на трети своей длины прикреплён к шарнирной опоре.



В оригинале середину нижнего стержня тянет вниз человек; здесь его действие показано силой $\vec{F}$

1. Как изменится (в какую сторону и на сколько) длина верхней пружины, если к середине нижнего стержня приложить внешнюю силу F, направленную вертикально вниз?
2. Чему равен коэффициент k_0 — жёсткости системы, если на неё действовать внешней вертикальной силой, приложенной к середине нижнего стержня?

Углы поворота стержней малы. Пружины остаются вертикальными.

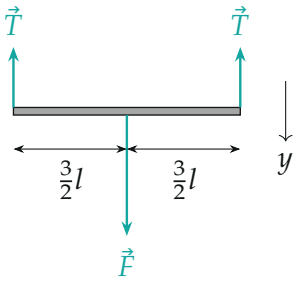
▲ **Решение. Что происходит.** Стержни и пружины лёгкие, поэтому для каждого стержня сумма сил и сумма моментов равны нулю, как в статике, хотя система и деформируется. Задача в два хода: сначала силы (условия равновесия нижнего, потом верхнего стержня — правило рычага), затем перемещения (закон Гука для каждой пружины и поворот

верхнего стержня вокруг шарнира). Жёсткость системы — отношение силы к смещению точки, где она приложена.

Обозначения. Длина верхнего стержня $3l$: от шарнира до левого конца l, до правого $2l$ (верхняя пружина $2k$ прикреплена к левому концу); T — сила упругости каждой из нижних пружин; T_1 — сила упругости верхней пружины; Δx_1 — деформация верхней пружины; ось y — вертикально вниз.

1. Нижний стержень. Он лёгкий, сумма моментов относительно его середины равна нулю: силы пружин на равных плечах, значит, они равны, $T_л = T_п = T$, и обе пружины растянуты (тянут стержень вверх). Второй закон Ньютона для лёгкого стержня в проекции на ось y:

$$F - 2T = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{F}{2}.$$

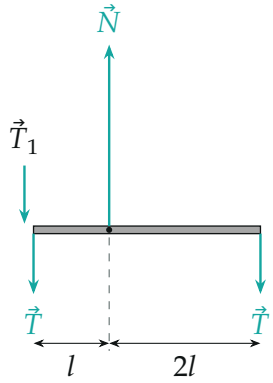


Силы на нижний стержень; длины стрелок — в отношении $F : T = 2 : 1$

2. Верхний стержень. На него действуют: нижние пружины тянут его вниз силами T на концах, верхняя пружина — сила T_1 на левом конце, шарнир — сила $\vec{N}$. Правило моментов относительно шарнира: тогда $\vec{N}$ не войдёт в уравнение. Правый конец (плечо $2l$) поворачивает стержень по часовой стрелке моментом $T \cdot 2l$, левая нижняя пружина (плечо l) — против часовой моментом Tl. Пусть верхняя пружина тянет левый конец вверх (растянута), тогда её момент $T_1 l$ — по часовой:

$$T_1 l + T \cdot 2l = Tl \quad \Rightarrow \quad T_1 = -T.$$

Знак минус: верхняя пружина не тянет, а *давит* на левый конец вниз — она сжата силой $T = \frac{F}{2}$.



Силы на верхний стержень (шарнир — точка): сжатая верхняя пружина давит вниз силой $T_1 = T$, опора — $N = 3T$

Проверим вторым способом: правая пружина на плече $2l$ даёт момент $2Tl$, левая на плече l — только Tl. Не хватающий момент Tl «против часовой» должна дать верхняя пружина на плече l, а для этого её сила направлена вниз, величина T. Сила шарнира из суммы сил: $N = T_1 + 2T = 3T$.

Пункт 1. Деформация верхней пружины. Закон Гука для пружины жёсткостью $2k$:

$$\Delta x_1 = \frac{T}{2k} = \frac{F}{4k}.$$

Верхняя пружина укорачивается на $\frac{F}{4k}$.

3. Смещения концов. Закон Гука для нижних пружин (сила T, жёсткость k):

$$\Delta x_2 = \frac{T}{k} = \frac{F}{2k} = 2\Delta x_1.$$

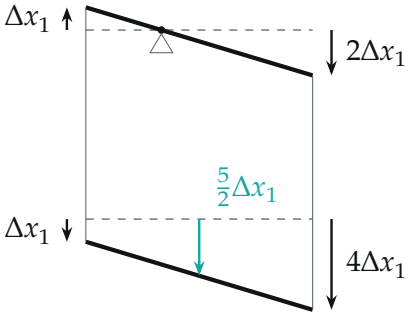
Верхний конец верхней пружины закреплён, она сжалась на Δx_1 — левый конец верхнего стержня поднялся на Δx_1. Стержень повернулся вокруг шарнира: смещения концов пропорциональны плечам, правый конец опустился на $2\Delta x_1$.

Нижние концы пружин опустились на свои верхние концы плюс растяжение $\Delta x_2 = 2\Delta x_1$:

$$y_л = -\Delta x_1 + 2\Delta x_1 = \Delta x_1, \qquad y_п = 2\Delta x_1 + 2\Delta x_1 = 4\Delta x_1.$$

Середина нижнего стержня смещается на среднее арифметическое смещений его концов:

$$\Delta x = \frac{y_л + y_п}{2} = \frac{5}{2}\Delta x_1 = \frac{5F}{8k}.$$



Смещения (масштаб общий): штрихами — стержни до приложения силы, сплошными — после; серые вертикали — оси пружин

Пункт 2. Жёсткость системы. По определению жёсткости $F = k_0\Delta x$:

$$k_0 = \frac{F}{\Delta x} = \frac{F}{\frac{5F}{8k}} = \frac{8}{5}k.$$

Обратите внимание. Верхняя пружина не растягивается, как можно ожидать «по привычке», а сжимается: рычаг на шарнире переворачивает направление силы. Смещение середины нижнего стержня — это не растяжение одной пружины, а сумма поворота верхнего стержня и растяжений нижних пружин.

Проверка. Энергией: работа внешней силы при медленном нагруже-

нии $\frac{F\Delta x}{2}$ равна сумме энергий пружин

$$\frac{2k\Delta x_1^2}{2} + 2\cdot\frac{k(2\Delta x_1)^2}{2} = 5k\Delta x_1^2,$$

$$\frac{F\cdot\frac{5}{2}\Delta x_1}{2} = \frac{4k\Delta x_1\cdot\frac{5}{2}\Delta x_1}{2} = 5k\Delta x_1^2$$

совпало. Без шарнира и верхней пружины (две параллельные пружины k) жёсткость была бы $2k$; поворот верхнего стержня добавляет податливость, и $k_0 = 1{,}6k < 2k$.

Ответ. 1) верхняя пружина сожмётся на $\Delta x_1 = \dfrac{F}{4k}$; 2) $k_0 = \dfrac{8}{5}k$.