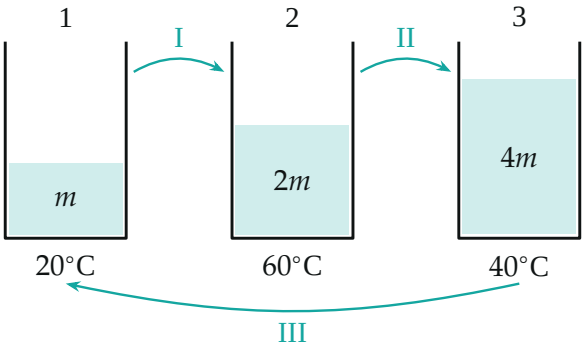
Сосуды с водой

Задача 3. [ВсОШ 2021/22, региональный этап, 9 класс, задача 3] В трёх сосудах находится вода массой m, $2m$ и $4m$ при температуре $t = 20°\text{C}$, $3t = 60°\text{C}$ и $2t = 40°\text{C}$ соответственно. Порцию воды из первого сосуда переливают во второй. Затем такую же по массе порцию из второго сосуда переливают в третий. И в завершение, такую же порцию из третьего сосуда переливают в первый. В результате в первом сосуде устанавливается равновесная температура $t_1 = 28°\text{C}$, а во втором — $t_2 = 54°\text{C}$. Определите новую температуру t_3 в третьем сосуде. Тепловыми потерями и теплоёмкостью сосудов можно пренебречь.



Поясняющий рисунок: три переливания одинаковых порций I, II, III по кругу $1 \to 2 \to 3 \to 1$

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на уравнение теплового баланса. Следить за каждым переливанием неудобно: неизвестна масса порции. Главная идея — посмотреть на конец целиком. Каждый сосуд один раз отдал порцию и один раз получил такую же по массе, поэтому в конце в сосудах снова m, $2m$ и $4m$ воды. Внутри замкнутой системы из всей воды энергия только перераспределялась, поэтому сумма теплот, полученных водой каждого сосуда, равна нулю.

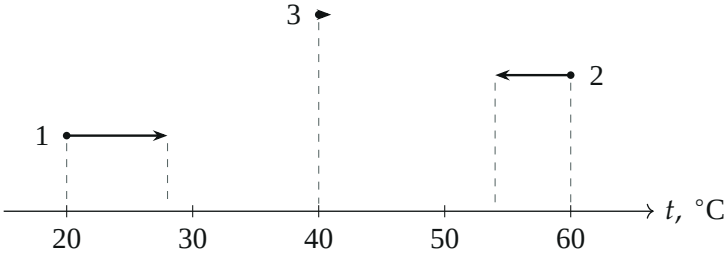
Обозначения. c — удельная теплоёмкость воды; Q_1, Q_2, Q_3 — количества теплоты, полученные водой, которая *в конце* находится в сосудах 1, 2, 3 (если $Q < 0$ — вода отдала теплоту).

1. Почему можно считать по сосудам. Внутренняя энергия воды массы M при температуре T равна cMT (с точностью до постоянной). В начале энергия всей воды $c(m\cdot t + 2m\cdot 3t + 4m\cdot 2t)$, в конце — $c(mt_1 + 2mt_2 + 4mt_3)$: в конце в сосудах те же массы и в каждом сосуде вода перемешана до одной температуры. Потерь нет, теплоёмкость сосудов ноль — закон сохранения энергии для всей воды:

$$cm\,t + c\cdot 2m\cdot 3t + c\cdot 4m\cdot 2t = cm\,t_1 + c\cdot 2m\,t_2 + c\cdot 4m\,t_3.$$

То же самое в виде теплового баланса:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0, \qquad cm(t_1 - t) + c\cdot 2m(t_2 - 3t) + c\cdot 4m(t_3 - 2t) = 0.$$



Начальные (точки) и конечные (острия) температуры сосудов: вода первого и третьего нагрелась, второго — остыла

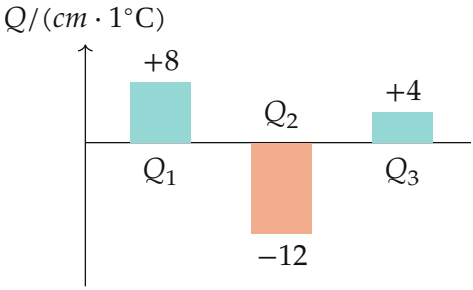
2. Решаем. Сократим на cm:

$$(t_1 - t) + 2(t_2 - 3t) + 4(t_3 - 2t) = 0 \quad\Rightarrow\quad t_3 = \frac{15t - t_1 - 2t_2}{4}.$$

Подставим числа:

$$t_3 = \frac{15\cdot 20 - 28 - 2\cdot 54}{4} = \frac{300 - 28 - 108}{4} = \frac{164}{4} = 41^\circ\text{C}.$$

Знак: $t_3 > 2t$ — вода третьего сосуда в итоге немного нагрелась.



Теплоты в единицах $cm\cdot 1°C$ (высоты столбиков — по величине): что отдала вода второго сосуда, 12, *получили первый (8) и третий (4)*

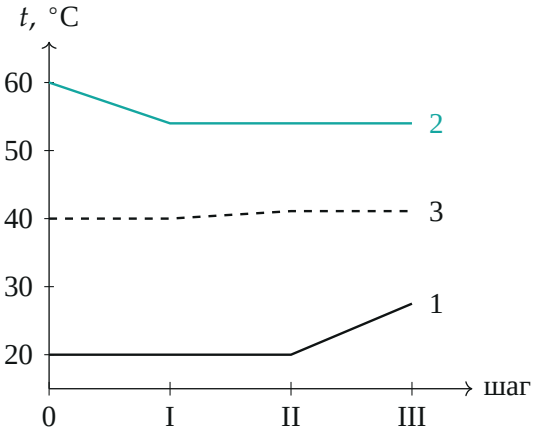
3. Второй способ — по шагам. Пусть порция имеет массу Δm. После первого переливания во втором сосуде $2m+\Delta m$ воды; дальше из него только отливают, поэтому его температура уже конечная, t_2. Уравнение теплового баланса для смешивания во втором сосуде:

$$c\cdot 2m(3t-t_2)=c\,\Delta m(t_2-t) \quad\Rightarrow\quad \Delta m=\frac{2m(60-54)}{54-20}=\frac{6}{17}\,m.$$

После второго переливания температура третьего сосуда больше не меняется (из него только отливают):

$$t_3=\frac{4m\cdot 2t+\Delta m\,t_2}{4m+\Delta m}=\frac{4\cdot 40+\frac{6}{17}\cdot 54}{4+\frac{6}{17}}\approx 41{,}1°\mathrm{C}.$$

Совпадает с ответом до округления температур в условии.



Температуры сосудов после каждого переливания, посчитанные при $\Delta m = \frac{6}{17}m$

Обратите внимание. Сумма теплот равна нулю только потому, что в конце массы воды в сосудах те же, что в начале. Если бы порции были разными, уравнение с массами m, $2m$, $4m$ было бы неверным.

Проверка. Размерность: в ответе складываются температуры с безразмерными коэффициентами — получается температура. Предел: если бы ничего не изменилось, $t_1 = t$ и $t_2 = 3t$, формула даёт $t_3 = \frac{15t - t - 6t}{4} = 2t$ — третий сосуд тоже не изменился, как и должно быть. Пошаговый расчёт (второй способ) дал 41,1°C. Смысл: вся теплота, отданная горячим вторым сосудом, поделилась между первым и третьим.

Ответ. $t_3 = \dfrac{15t - t_1 - 2t_2}{4} = 41°\text{C}.$