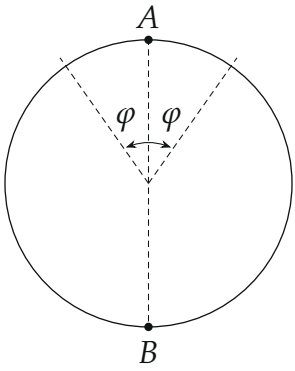
Кольцо

Задача 4. [ВсОШ 2021/22, региональный этап, 9 класс, задача 4] Кольцо радиусом r сделано из проволоки с поперечным сечением S, удельное сопротивление ρ которой увеличивается от точки A до точки B по линейному закону $\rho = \alpha\varphi$, где α — известная постоянная, φ — угол, отсчитываемый от точки A по (или против) часовой стрелки, как показано на рисунке. Площадь S сечения проволоки известна и постоянна вдоль всего кольца.



1. Определите сопротивление R_0 всей проволоки, из которой изготовлено кольцо.
2. Найдите на кольце две точки M и N, между которыми эквивалентное сопротивление R_{MN} кольца максимально при минимальном расстоянии между M и N. Определите значение этого сопротивления $R_{\max}$ и расстояние L между M и N.

▲ **Решение. Что происходит.** Удельное сопротивление меняется вдоль проволоки, поэтому сопротивление куска — сумма сопротивлений малых участков, на каждом из которых ρ можно считать постоянным. Подключённое в двух точках кольцо — две дуги, соединённые параллельно; сумма их сопротивлений всегда равна R_0. Отсюда максимум R_{MN} — при равных дугах, а чтобы точки оказались ближе всего друг к другу, короткая дуга должна взять на себя проволоку с наибольшим ρ, то есть окружать точку B.

Обозначения. φ — угол от точки A (по любой из половин кольца, $0 \le \varphi \le \pi$); dR — сопротивление малого участка; $R_1 = R_{MAN}$, $R_2 = R_{MBN}$ — сопротивления дуг через A и через B; φ_0 — угол точек M и N.

Пункт 1. Сопротивление всей проволоки. Рассмотрим малый участок от φ до $\varphi + d\varphi$: его длина $r\,d\varphi$, удельное сопротивление на нём $\alpha\varphi$. Сопротивление участка

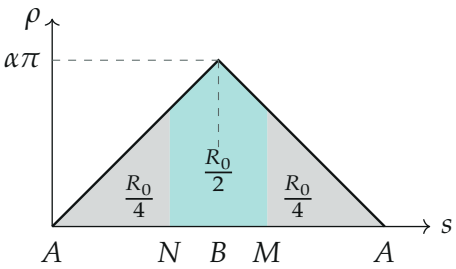
$$dR = \frac{\rho\, r\, d\varphi}{S} = \frac{\alpha r}{S}\,\varphi\, d\varphi.$$

Участки соединены последовательно, сопротивления складываются. Сумма $\varphi\, d\varphi$ от A ($\varphi = 0$) до B ($\varphi = \pi$) — это площадь под графиком $\rho(\varphi) \propto \varphi$, треугольник с катетами π и π:

$$R_{AB} = \frac{\alpha r}{S} \cdot \frac{\pi^2}{2}.$$

То же через среднее: ρ растёт линейно, среднее на половине кольца $\rho_{\text{ср}} = \frac{\alpha\pi}{2}$, длина πr, $R_{AB} = \frac{\rho_{\text{ср}}\pi r}{S} = \frac{\alpha\pi^2 r}{2S}$. Половин две:

$$R_0 = 2R_{AB} = \frac{\alpha\pi^2 r}{S}.$$



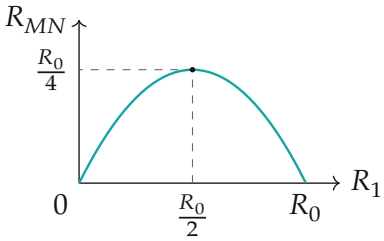
Удельное сопротивление вдоль кольца, развёрнутого от A через B обратно в A ($s = r\times$пройденный угол). Площадь под графиком пропорциональна сопротивлению; бирюзой — короткая дуга NBM, она содержит половину всей площади (точки M, N — по ответу пункта 2)

2. Сопротивление между двумя точками. Подключимся к точкам M и N. Дуги MAN и MBN соединены параллельно, а вместе они составляют всю проволоку: $R_1 + R_2 = R_0$. Закон параллельного соединения:

$$R_{MN} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_1(R_0 - R_1)}{R_0}.$$

Как функция R_1 это парабола ветвями вниз с нулями в 0 и R_0; вершина посередине, при $R_1 = R_2 = \frac{R_0}{2}$:

$$R_{\max} = \frac{\frac{R_0}{2} \cdot \frac{R_0}{2}}{R_0} = \frac{R_0}{4} = \frac{\alpha\pi^2 r}{4S}.$$



Сопротивление между точками в зависимости от сопротивления одной из дуг: максимум при равных дугах

Равных дуг бесконечно много (например, $M = A$, $N = B$). Нужны две точки, ближайшие друг к другу.

3. Где точки M и N. Одна из дуг короче; её сопротивление $\frac{R_0}{2}$ задано. Короче всего она будет, если на неё попадёт проволока с самым большим ρ — окрестность точки B. При ρ, симметричном относительно B, это дуга, симметричная относительно B: M и N на одном угле φ_0 от A по разные стороны. Тогда каждая из дуг NB и BM имеет сопротивление $\frac{R_0}{4}$. Сумма dR от φ_0 до π — площадь трапеции под графиком:

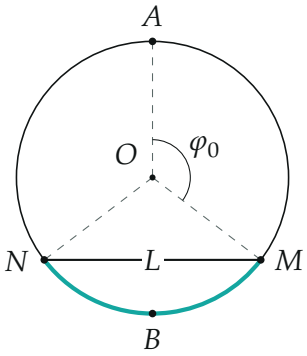
$$R_{NB} = \frac{\alpha r}{S} \cdot \frac{\pi^2 - \varphi_0^2}{2} = \frac{R_0}{4} = \frac{\alpha\pi^2 r}{4S}.$$

Отсюда

$$\pi^2 - \varphi_0^2 = \frac{\pi^2}{2}, \qquad \varphi_0 = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \approx 2{,}22 \text{ рад} \approx 127^\circ.$$

4. Расстояние L**.** Треугольник MON (O — центр) равнобедренный с боковыми сторонами r; центральный угол короткой дуги MBN равен $2(\pi - \varphi_0)$. Основание

$$L = 2r\sin(\pi - \varphi_0) = 2r\sin\frac{\pi}{\sqrt{2}} \approx 2r\sin 52{,}7^\circ \approx 1{,}6\,r.$$



Точки M и N на угле $\varphi_0 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ от A; бирюзовая короткая дуга NBM и длинная дуга через A имеют равные сопротивления $\frac{R_0}{2}$

Обратите внимание. Половина сопротивления — не половина длины: короткая дуга NBM занимает лишь $\frac{2(\pi-\varphi_0)}{2\pi} \approx 29\%$ окружности, но сопротивление у неё то же, что у остальных 71%, потому что там проволока «хуже» проводит.

Проверка. Размерность: $\frac{\alpha r}{S}$ — $\frac{\text{Ом·м·м}}{\text{м}^2}$ = Ом (α измеряется в Ом·м на радиан). Предел: для однородной проволоки точки равных сопротивлений были бы диаметрально противоположны, $L = 2r$; здесь $L \approx 1{,}6r < 2r$ — точки сблизились, как и ожидалось. Численно: сумма $\varphi\,\Delta\varphi$ от 2,221 до π мелкими шагами равна $2{,}467 = \frac{\pi^2}{4}$.

Ответ. 1) $R_0 = \dfrac{\alpha\pi^2 r}{S}$; 2) M и N симметричны относительно B на угле $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}} \approx 127^\circ$ от A; $R_{\max} = \dfrac{R_0}{4} = \dfrac{\alpha\pi^2 r}{4S}$; $L = 2r\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{2}} \approx 1{,}6\,r$.