Параллелограмм

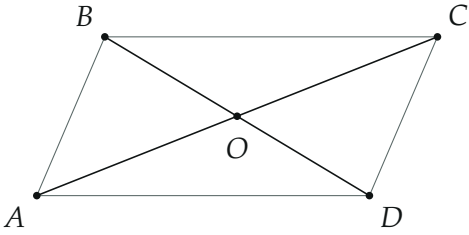
Задача 5. [ВсОШ 2021/22, региональный этап, 9 класс, задача 5] Два точечных действительных источника света и два их изображения, полученные с помощью тонкой линзы, образуют параллелограмм (см. рисунок). Построением восстановите положение линзы, определите её тип, найдите положения фокусов F и главной оптической оси (ГОО).



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на построение в тонкой линзе. Ключевое свойство: луч через оптический центр не преломляется, поэтому источник, его изображение и оптический центр лежат на одной прямой. Значит, оптический центр — общая точка двух прямых «источник — изображение». Дальше по симметрии картины найдём, на каком расстоянии от линзы стоят источники, и отсюда — фокусы.

Обозначения. A, B, C, D — вершины параллелограмма (рисунок ниже); O — точка пересечения диагоналей; d — расстояние от источника до плоскости линзы, f — от изображения; F — фокусное расстояние.

1. Оптический центр. Через каждую пару «источник — изображение» проходит прямая, на которой лежит оптический центр. Пар две, прямых две, и они должны пересечься. Стороны параллелограмма попарно параллельны и не пересекаются, поэтому пары — только концы диагоналей: A–C и B–D. Оптический центр линзы — точка O пересечения диагоналей.



Прямые «источник — изображение» — диагонали; оптический центр O — их пересечение

2. Тип линзы. Источник и его изображение (A и C, B и D) лежат по разные стороны от O, то есть по разные стороны от линзы. Изображение действительного источника по другую сторону линзы — действительное, его даёт только собирающая линза (рассеивающая даёт мнимое изображение по ту же сторону). Линза собирающая.

3. Расстояния до линзы. Диагонали параллелограмма делятся точкой O пополам: $OA = OC$, $OB = OD$. Расстояния от точки до плоскости линзы пропорциональны расстояниям вдоль прямой через O, поэтому $f = d$. Формула тонкой линзы:

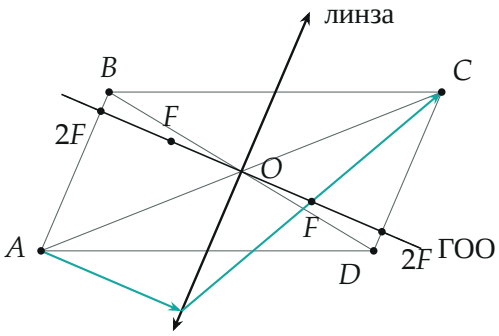
$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}, \qquad f = d \quad \Rightarrow \quad d = f = 2F.$$

Источники и изображения — в плоскостях двойного фокуса. Оба источника стоят на одном расстоянии $2F$ от линзы, поэтому прямая, проходящая через них, параллельна линзе. То же для изображений.

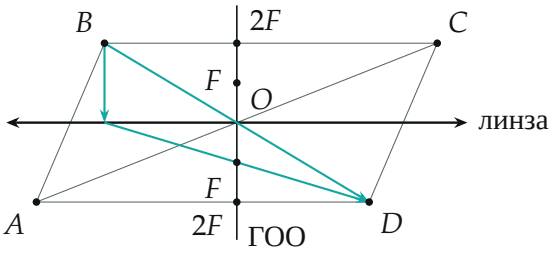
4. Два возможных положения линзы. Источниками могут быть A и B (тогда изображения C и D), и линза параллельна AB и CD; или источники B и C (изображения D и A), и линза параллельна BC и AD. По условию эти случаи не различить, поэтому строим оба. Порядок построения одинаков:

1. через O параллельно паре «источник — источник» проводим линзу;
2. через O перпендикулярно линзе проводим главную оптическую ось;

3. ось пересекает стороны параллелограмма в точках двойного фокуса $2F$;
4. середины отрезков от O до точек $2F$ — фокусы F.



Первый случай: источники A, B, изображения C, D, линза параллельна AB. Бирюзой — проверочный луч из A: параллельно оси до линзы, после неё через фокус — приходит точно в C (посчитано)



Второй случай: источники B, C, изображения D, A, линза параллельна BC. Лучи из B: через центр O — без преломления, параллельный оси — через фокус; оба сходятся в D

5. Проверка построения лучами. Во втором случае луч из B, параллельный оси, после линзы идёт через фокус: на рисунке он попадает в D, куда приходит и луч BOD через центр. В первом случае так же луч из A приходит в C. Значит, построение верно: точка, где сходятся лучи, и есть изображение.

Обратите внимание. Задача имеет два ответа: условие не говорит, какие две точки — источники. Пары «источник — изображение» при этом

определены однозначно (концы диагоналей), а тип линзы и расстояние $2F$ одинаковы в обоих случаях.

Проверка. Увеличение $\Gamma = \frac{f}{d} = 1$ при $d = 2F$ — изображение того же размера, перевёрнутое: отрезок AB переходит в равный ему отрезок CD, развёрнутый относительно O, как и в параллелограмме. Смысл: параллелограмм — это центральная симметрия, а собирающая линза в плоскостях $2F$ и действует как центральная симметрия относительно оптического центра.

Ответ. Линза собирающая, оптический центр — точка O пересечения диагоналей; пары «источник — изображение» — концы диагоналей. Источники и изображения — на расстоянии $2F$ от линзы. Два варианта: линза через O параллельно AB и CD или параллельно BC и AD; ГОО — перпендикуляр к линзе через O, её пересечения со сторонами — точки $2F$, фокусы — середины отрезков от O до них.