Эффективная масса

Задача 1. [ВсОШ 2021/22, заключительный этап, 10 класс, практический тур, задача 1] «Эффективная масса».

Оборудование: 1) секундомер; 2) стойка с неподвижным блоком; 3) 10 гаек М5 (массой $m = (0{,}95 \pm 0{,}02)$ г каждая); 4) 10 гаек М10 (массой $M = (10 \pm 1)$ г каждая); 5) катушка ниток; 6) ножницы; 7) две скрепки (массой $m_с = (0{,}44 \pm 0{,}02)$ г каждая); 8) мерная лента; 9) круглый карандаш; 10) клейкая масса; 11) струбцина.

При вращении неподвижного блока выполняется соотношение

$$E_к = \frac{m_{эфф}\,\omega^2 r^2}{2},$$

где $E_к$ — кинетическая энергия вращения блока, ω — угловая скорость вращения блока, r — радиус блока, $m_{эфф}$ — эффективная масса блока.

Определите:

1. эффективную массу $m_{эфф}$ выданного блока;
2. коэффициент трения скольжения μ нити о боковую поверхность карандаша.

Внимание! При выполнении этого задания имейте в виду, что трогать «рабочую» часть нити и боковую (окрашенную) поверхность карандаша руками не следует, так как на их поверхности могут остаться следы пота и жира. Это может заметно изменить значение коэффициента трения μ. Укажите в отчёте действия, которые Вы предпринимали для повышения точности результатов.

Примечание: трением в оси блока можно пренебречь.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Блок — это машина Атвуда: два груза на нити через блок. Кинетическая энергия вращающегося блока записана так, будто это ещё одна масса $m_{эфф}$, движущаяся со скоростью нити $v = \omega r$. Поэтому блок просто добавляется к инертной массе системы, и ускорение грузов несёт $m_{эфф}$. Для трения нить дополнительно перегибаем через неподвижный карандаш: трение нити о карандаш отбирает часть движущей силы, пропорциональную μ и углу обхвата φ. В обоих

опытах выбираем координаты, в которых теория — прямая: $m_{эфф}$ даёт свободный член, μ — наклон.

Обозначения. $m_1 > m_2$ — массы грузов (гайки на скрепке), a — ускорение грузов, t — время прохождения пути, L, L_2 — пути грузов, φ — угол, на который нить поворачивает на карандаше, x — смещение карандаша, L_1 — расстояние от карандаша до блока по нити.

Пункт 1. Эффективная масса.

1. Установка. Нить с двумя подвесами-скрепками перекинута через блок (рис. 1). На скрепки надеваем гайки: $m_1 = N_{1б}M + N_{1м}m + m_c$, $m_2 = N_{2б}M + m_c$. Тяжёлый груз отпускаем от края стола без толчка и секундомером измеряем время t, за которое он проходит до пола путь $L = (72{,}9 \pm 0{,}2)$ см; каждое время — по три раза, берём среднее $\langle t \rangle$. Сначала проверяем трение в оси: при $|m_1 - m_2| < 0{,}4$ г блок не трогается, значит, трение мало по сравнению с движущими силами в опыте (разность масс в опытах — от 5 г).

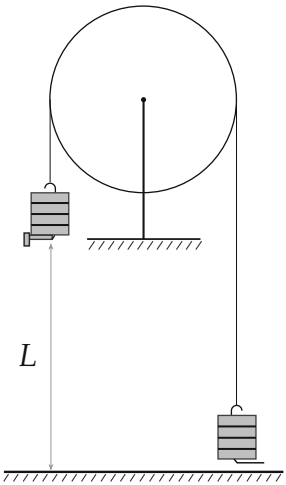

Рис. 1. Схема установки для измерения $m_{эфф}$.

2. Теория. Нить нерастяжима и не проскальзывает по блоку, поэтому скорости грузов равны $v = \omega r$. Закон сохранения энергии для системы

«блок + грузы» (трения нет): когда грузы прошли путь s,

$$\frac{(m_1 + m_2 + m_{\text{эфф}})v^2}{2} = (m_1 - m_2)gs.$$

Продифференцируем по времени ($dv/dt = a$, $ds/dt = v$):

$$(m_1 + m_2 + m_{\text{эфф}})\, a = (m_1 - m_2)\, g.$$

Ускорение постоянно, путь из покоя $L = at^2/2$, отсюда $a = 2L/\langle t\rangle^2$.

3. Линеаризация. Обозначим

$$Y_1 = m_1 + m_2, \qquad X_1 = \frac{g\langle t\rangle^2}{2L}(m_1 - m_2) = \frac{(m_1 - m_2)g}{a};$$

тогда $Y_1 = X_1 - m_{\text{эфф}}$: прямая с наклоном 1, отсекающая на оси Y_1 отрезок $-m_{\text{эфф}}$. Меняем числа гаек на обоих грузах и для каждой пары (m_1, m_2) получаем точку.

4. Обработка. Точки организаторов (две точки с огромной погрешностью отброшены) и прямая метода наименьших квадратов — на рис. 2:

$$Y_1 = (0{,}88 \pm 0{,}05)X_1 - (17 \pm 5)\text{ г}.$$

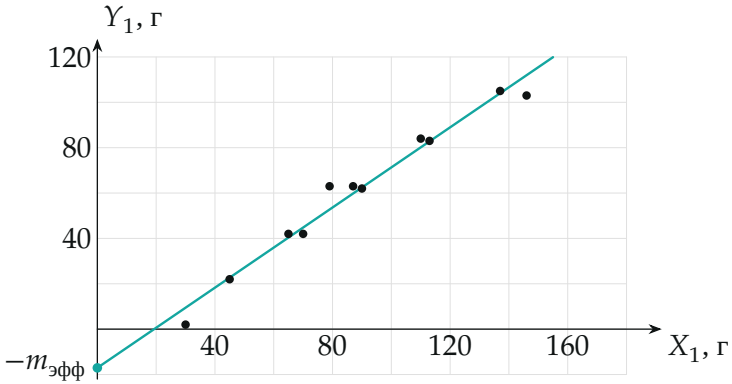

Рис. 2. $Y_1 = m_1 + m_2$ от $X_1 = (m_1 - m_2)g/a$; точки сняты с графика организаторов.

Свободный член даёт $m_{\text{эфф}} \approx (17 \pm 5)$ г; у организаторов (15 ± 5) г — в пределах погрешности. Погрешность в основном от времени: $X_1 \propto t^2$, и ошибка реакции 0,1–0,2 с при $t \approx 1$–2 с даёт 10–20 % по X_1 (длинные горизонтальные «усы» на графике организаторов). Наклон чуть меньше единицы: небольшое трение в оси всё же тормозит грузы.

5. Проверка вторым методом (колебания). К ободу блока приклеиваем гайку M на расстоянии $l = (4{,}5 \pm 0{,}1)$ см от оси (радиус блока $r = (4{,}9 \pm 0{,}1)$ см). Блок с гайкой — физический маятник. Закон сохранения энергии при малом отклонении α (высота гайки $l(1 - \cos\alpha) \approx l\alpha^2/2$):

$$\frac{(m_{\text{эфф}} r^2 + Ml^2)\,\dot{\alpha}^2}{2} + \frac{Mgl\,\alpha^2}{2} = \text{const} \;\Rightarrow\; T = 2\pi\sqrt{\frac{m_{\text{эфф}} r^2 + Ml^2}{Mgl}},$$

$$m_{\text{эфф}} = M\left(\frac{T^2 g l}{4\pi^2 r^2} - \frac{l^2}{r^2}\right).$$

Измеряя время 10 колебаний, организаторы получили $m_{\text{эфф}} = (25 \pm 6)$ г — в разумном согласии с первым методом; завышение объясняется трением в оси, которое при малых колебаниях заметнее.

Пункт 2. Коэффициент трения нити о карандаш.

6. Трение нити на изгибе. Нить огибает карандаш по дуге угла φ. Рассмотрим малый кусок нити, охватывающий угол $d\varphi$ (рис. 3). Натяжения на концах T и $T + dT$, сила нормального давления карандаша $dN = T\,d\varphi$ (две силы натяжения под углом $d\varphi$ друг к другу), трение скольжения $\mu\,dN$. Второй закон Ньютона для куска вдоль нити (масса куска пренебрежимо мала):

$$dT = \mu T\,d\varphi.$$

Углы в опыте малы ($\varphi < 0{,}45$), поэтому натяжение на карандаше почти не меняется, и вся сила трения $F_{\text{тр}} = \Delta T \approx \mu\varphi T$, где $T \approx \frac{(m_1+m_2)g}{2}$ — среднее натяжение (при малом ускорении натяжение близко к среднему весу грузов).

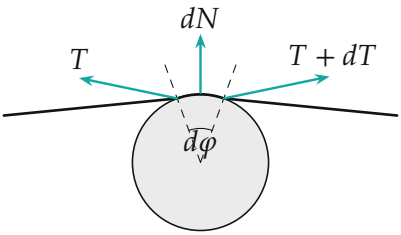

Рис. 3. Кусок нити на карандаше: натяжения на концах и сила давления карандаша.

7. Установка и теория. Грузы $m_1 = 5M+5m$ и $m_2 = 5M$ (плюс скрепки). Нить от блока к лёгкому грузу проходит по карандашу, зажатому струбциной на расстоянии $L_1 = (47{,}5 \pm 0{,}1)$ см от блока; карандаш сдвигаем вбок на x, нить поворачивает на угол φ, $\operatorname{tg}\varphi \approx x/L_1$ (рис. 4). Измеряем время, за которое лёгкий груз проходит путь $L_2 = (66{,}0 \pm 0{,}2)$ см от пола до карандаша. Закон сохранения энергии теперь с работой силы трения $\mu\varphi\frac{(m_1+m_2)g}{2}$ на каждом метре пути:

$$(m_1 + m_2 + m_{\text{эфф}})\, a = (m_1 - m_2)\, g - \frac{m_1 + m_2}{2}\, \mu\varphi g.$$

Поделим на $\frac{(m_1+m_2)g}{2}$:

$$Y_2 \equiv \left(1 + \frac{m_{\text{эфф}}}{m_1 + m_2}\right)\frac{2a}{g} = \frac{2(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} - \mu\varphi.$$

Y_2 — линейная функция φ с наклоном $-\mu$; $m_{\text{эфф}}$ уже известна из пункта 1.

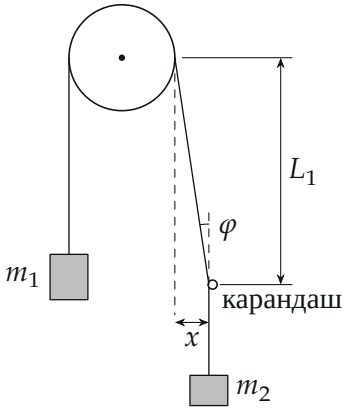

Рис. 4. Нить перегибается на карандаше на угол φ (масштаб по горизонтали увеличен).

8. Обработка. Точки организаторов и прямая МНК (рис. 5):

$$Y_2 = (0{,}085 \pm 0{,}002) - (0{,}167 \pm 0{,}008)\,\varphi.$$

Свободный член согласуется с теорией: $\frac{2(m_1-m_2)}{m_1+m_2} = \frac{2\cdot 4{,}75}{105{,}6} = 0{,}090$. Наклон даёт $\mu = 0{,}17$; с учётом погрешностей M (10 %), $m_{\text{эфф}}$ и времени — $\mu = 0{,}17 \pm 0{,}02$.

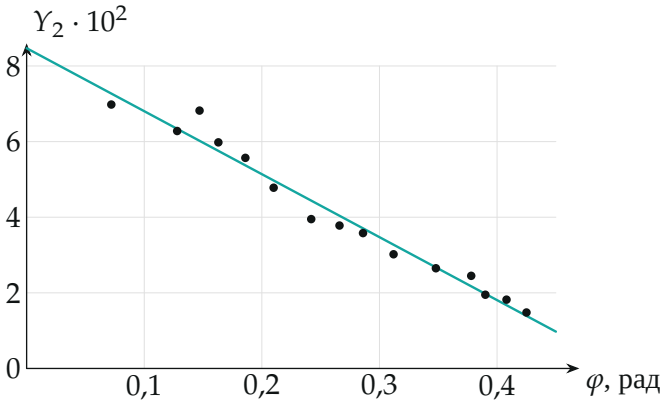

Рис. 5. Y_2 от угла обхвата φ; наклон — $-\mu$.

9. Статическая проверка. Сдвигаем карандаш, пока грузы не перестанут двигаться: тогда $a = 0$, и $\mu\varphi_0 = \frac{2(m_1-m_2)}{m_1+m_2}$. Этот способ грубее

(граница остановки размыта трением покоя), у организаторов он дал $\mu = 0{,}13 \pm 0{,}04$ — в согласии с динамическим.

10. Как повышали точность. Нить и карандаш берём только за концы и торцы; карандаш перед опытами не трогаем руками, рабочий кусок нити не перематываем; каждое время меряем трижды; путь L берём максимальным (от стола до пола), чтобы относительная ошибка времени была меньше; точки с аномально большой погрешностью не учитываем при проведении прямой.

Обратите внимание: в Y_2 входит $m_{\text{эфф}}$ — без учёта инертности блока наклон был бы другим, и μ вышло бы с систематической ошибкой порядка $m_{\text{эфф}}/(m_1 + m_2) \approx 15\,\%$.

Проверка. Размерности: X_1, Y_1 — граммы, Y_2 и $\mu\varphi$ безразмерны. Предел $\varphi \to 0$: Y_2 равен теоретическому $2(m_1 - m_2)/(m_1 + m_2)$ (0,085 против 0,090). Два независимых метода в каждом пункте согласуются.

Физический смысл: вращающийся блок ведёт себя как добавочная масса порядка массы самого блока, а трение нити на изгибе пропорционально углу изгиба.

Ответ. 1) $m_{\text{эфф}} = (17 \pm 5)$ г (динамический метод; по колебаниям — (25 ± 6) г); 2) $\mu = 0{,}17 \pm 0{,}02$ (статический метод — $0{,}13 \pm 0{,}04$).