Три тигра

Задача 1. [ВсОШ 2021/22, заключительный этап, 10 класс, задача 1] «Три тигра».

Три тигра одновременно начинают движение по горизонтальной поверхности с постоянными по модулю скоростями. Скорость первого тигра в любой момент времени направлена на второго, скорость второго — на третьего, а скорость третьего — на первого. В начальный момент времени тигры образуют прямоугольный треугольник с катетами, равными L (рис. 1). Считайте размеры тигров много меньшими L. Модуль скорости первого тигра $v_1 = v$, где v — известная величина, а скорости второго и третьего тигров v_2 и v_3 таковы, что в процессе движения углы в треугольнике ABC, образованном тиграми, остаются постоянными.

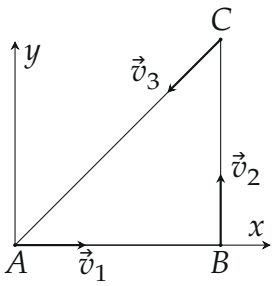

Рис. 1

Введём систему координат так, как показано на рисунке. Начало координат совпадает с положением первого тигра в момент старта (точкой A).

При ответе на первые три вопроса считайте, что тигры не проскальзывают по поверхности и могут развивать любое усилие. Найдите:

1. время t, через которое тигры встретятся;
2. модули скоростей второго и третьего тигров v_2 и v_3;
3. координаты (x, y) точки, в которой тигры встретятся.

В действительности движение тигров ограничивается коэффициентами трения их лап о поверхность. Для каждого тигра он одинаков и равен μ. Ускорение свободного падения g.

4. в течение какого времени τ с момента старта тигры могут поддерживать такое движение?

▲ **Решение. Что происходит.** Углы треугольника ABC постоянны, значит, в любой момент он подобен исходному: он одновременно сжимается и поворачивается, оставаясь прямоугольным равнобедренным. Тогда все три стороны сокращаются в одном и том же отношении, а направления всех сторон (и скоростей тигров, которые идут вдоль сторон) поворачиваются с одной угловой скоростью ω. Главная идея — считать не координаты тигров, а скорости изменения длин сторон: это проекции скоростей на стороны. Это задача класса «преследование»: скорость сближения двух тел — сумма проекций их скоростей на соединяющую их прямую.

Обозначения. $a = AB = BC$ — катеты в произвольный момент, $AC = a\sqrt{2}$; ω — угловая скорость поворота сторон треугольника; O — точка встречи; $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$ — перемещения первого и второго тигров до встречи.

Пункт 1. Время встречи.

1. Скорость сокращения стороны AB**.** Скорость сближения двух тигров равна сумме проекций их скоростей на прямую, соединяющую тигров (поперечные составляющие расстояние в первом порядке не меняют). Скорость $\vec{v}_1$ направлена вдоль AB, а $\vec{v}_2$ — вдоль BC, перпендикулярно AB (угол B прямой и остаётся прямым). Поэтому

$$-\frac{da}{dt} = v_1 + 0 = v.$$

Скорость сокращения AB постоянна, и сторона исчезает через $t = L/v$. Треугольник подобен исходному, значит, вместе с AB в точку стягиваются и две другие стороны: все три тигра встречаются одновременно.

Пункт 2. Скорости второго и третьего тигров.

2. Скорости сокращения BC **и** AC**.** Проецируем скорости на эти стороны (рис. 2). На BC: $\vec{v}_2$ направлена вдоль BC к C, а $\vec{v}_3$ — вдоль CA, под углом 45° к CB. На AC: $\vec{v}_3$ направлена вдоль CA, а $\vec{v}_1$ — вдоль AB, под

углом 45° к AC:

$$-\frac{d(BC)}{dt} = v_2 + \frac{v_3}{\sqrt{2}}, \qquad -\frac{d(AC)}{dt} = v_3 + \frac{v}{\sqrt{2}}.$$

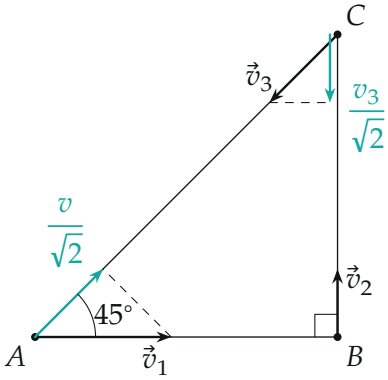

Рис. 2. Проекции скоростей на стороны (бирюзой — составляющие, сокращающие AC и BC).

3. Условие подобия. Треугольник остаётся подобным исходному: $BC = a$, $AC = a\sqrt{2}$ в любой момент. Продифференцируем: $\frac{d(BC)}{dt} = \frac{da}{dt} = -v$, $\frac{d(AC)}{dt} = \sqrt{2}\frac{da}{dt} = -\sqrt{2}\,v$. Отсюда

$$v_3 + \frac{v}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,v \;\Rightarrow\; v_3 = \frac{v}{\sqrt{2}}; \qquad v_2 + \frac{v_3}{\sqrt{2}} = v \;\Rightarrow\; v_2 = v - \frac{v}{2} = \frac{v}{2}.$$

Пункт 3. Точка встречи.

4. Скорости первого и второго тигров связаны поворотом. В любой момент $\vec{v}_1$ идёт вдоль AB, а $\vec{v}_2$ — вдоль BC, то есть повёрнута относительно $\vec{v}_1$ на 90° против часовой стрелки, и $v_2 = v_1/2$. Это верно в каждый момент, значит, верно и для сумм малых перемещений $\vec{v}\,dt$ от старта до встречи: перемещение $\vec{S}_2$ второго тигра — это перемещение $\vec{S}_1$ первого, повёрнутое на 90° и уменьшенное вдвое:

$$\vec{S}_2 \perp \vec{S}_1, \qquad S_2 = \frac{S_1}{2}.$$

5. Треугольник AOB**.** Оба тигра приходят в одну точку O: $\vec{S}_1 = \overrightarrow{AB} + \vec{S}_2$. Значит, в треугольнике AOB угол при O прямой, катеты $AO = S_1$ и $BO = S_1/2$, гипотенуза $AB = L$ (рис. 3):

$$S_1^2 + \frac{S_1^2}{4} = L^2 \;\Rightarrow\; S_1 = \frac{2L}{\sqrt{5}}, \qquad \operatorname{tg}\angle OAB = \frac{BO}{AO} = \frac{1}{2}.$$

Координаты точки O:

$$x = S_1 \cos\angle OAB = \frac{2L}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{4L}{5},$$

$$y = S_1 \sin\angle OAB = \frac{2L}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2L}{5}.$$

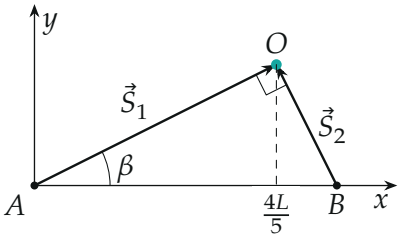

Рис. 3. Перемещения $\vec{S}_1 \perp \vec{S}_2$, $S_2 = S_1/2$; $\operatorname{tg}\beta = 1/2$.

Траектории, найденные численным интегрированием движения (рис. 4), действительно сходятся в точку $(0{,}8L;\ 0{,}4L)$; пунктиром — треугольник тигров в момент $t = L/(3v)$: он меньше, повёрнут, но подобен ABC.

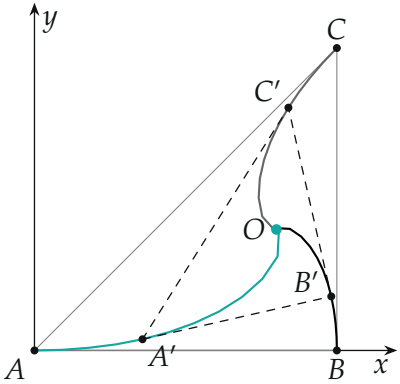

Рис. 4. Траектории тигров (бирюзой — первый) и точка встречи O.

Пункт 4. Ограничение трением.

6. Ускорение тигров. Модули скоростей постоянны, поэтому касательных ускорений нет, есть только нормальное: вектор скорости поворачивается. Все стороны треугольника поворачиваются с одной угловой скоростью ω, и вместе с ними — скорости тигров. Найдём ω по стороне AB: точка B смещается перпендикулярно AB со скоростью v_2, точка A — вдоль AB, поэтому

$$\omega = \frac{v_2}{a} = \frac{v}{2a}, \qquad a = L - vt.$$

За время dt скорость $\vec{v}_1$ поворачивается на угол $\omega\,dt$ и получает перпендикулярное приращение $v\,\omega\,dt$, то есть ускорение каждого тигра $a_i = v_i\omega$. Больше всего оно у самого быстрого, первого:

$$a_1 = v\omega = \frac{v^2}{2(L-vt)}, \qquad a_2 = \frac{a_1}{2}, \quad a_3 = \frac{a_1}{\sqrt{2}}.$$

7. Условие на трение. Горизонтальную силу, сообщающую тигру ускорение, даёт только сила трения покоя лап о поверхность. Второй закон Ньютона для первого тигра по горизонтали и ограничение трения

покоя $F_{\text{тр}} \le \mu N = \mu mg$:

$$ma_1 \le \mu mg \;\Rightarrow\; \frac{v^2}{2(L-vt)} \le \mu g \;\Rightarrow\; t \le \frac{L}{v} - \frac{v}{2\mu g}.$$

Ускорение a_1 растёт по мере сближения ($a \to 0$), поэтому такое движение возможно только до момента $\tau = \frac{L}{v} - \frac{v}{2\mu g}$. Если правая часть отрицательна ($\mu < \frac{v^2}{2gL}$), то трения не хватает уже на старте: $\tau = 0$.

Обратите внимание: ограничение наступает раньше всего у первого тигра, хотя все стороны поворачиваются одинаково: ускорение при повороте скорости пропорционально её модулю, а v_1 наибольшая.

Проверка. Размерности: $[L/v] = \text{с}$, $[v/(\mu g)] = \text{с}$. Предел $\mu \to \infty$: $\tau \to L/v$ — тигры дойдут до встречи, как в пунктах 1–3. Точку встречи даёт и численный счёт (рис. 4): $(0{,}800L;\, 0{,}400L)$ при $t = 0{,}999\, L/v$. Второй способ для v_3: $\vec{v}_3$ повёрнута относительно $\vec{v}_1$ на 225°, поэтому $\vec{S}_3$ — это $\vec{S}_1$, повёрнутое на 225° и уменьшенное в $\sqrt{2}$ раз; из точки $C(L, L)$ это ведёт в ту же O:

$$x = L + \frac{2L}{\sqrt{10}}\cos 251{,}6^\circ = \frac{4L}{5}, \qquad y = L + \frac{2L}{\sqrt{10}}\sin 251{,}6^\circ = \frac{2L}{5}.$$

Физический смысл: треугольник «живёт» как жёсткая фигура, которая равномерно сжимается и закручивается вокруг одной неподвижной точки O, и в неё же сходятся тигры по логарифмическим спиралям.

Ответ. 1) $t = \frac{L}{v}$; 2) $v_2 = \frac{v}{2}$, $v_3 = \frac{v}{\sqrt{2}}$; 3) $(x, y) = \left(\frac{4L}{5}, \frac{2L}{5}\right)$; 4) $\tau = \frac{L}{v} - \frac{v}{2\mu g}$ при $\mu \ge \frac{v^2}{2gL}$, иначе $\tau = 0$.