Поле цилиндра

Задача 2. [ВсОШ 2021/22, заключительный этап, 10 класс, задача 2] «Поле цилиндра».

Бесконечно длинный незаряженный металлический цилиндр радиуса R расположен в однородном электрическом поле $\vec{E}_0$. Ось цилиндра и вектор напряжённости поля горизонтальны и взаимно перпендикулярны (рис. 1). Напряжённость поля направлена вправо. На поверхности цилиндра установилось некоторое распределение индуцированных зарядов.

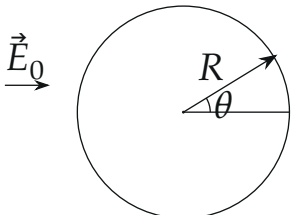

Рис. 1

Далее рассмотрим бесконечно длинный тонкостенный непроводящий цилиндр такого же радиуса R вне поля $\vec{E}_0$ вдали от первого (проводящего) цилиндра. Поместим на его поверхность заряды так, чтобы зависимость плотности заряда от угла θ к горизонту (рис. 2) совпадала для обоих цилиндров. Непроводящий цилиндр расположен горизонтально в поле тяжести. Ускорение свободного падения равно $\vec{g}$.

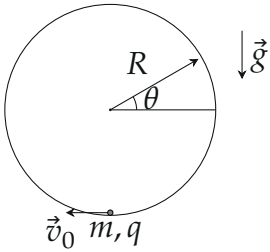

Рис. 2

Поместим внутрь непроводящего цилиндра гладкий точечный положительный заряд q массой m. Определите:

1. изменение суммарной потенциальной энергии точечного заряда (энергии в поле тяжести и в электрическом поле) при перемещении его из крайнего левого положения в крайнее правое;
2. точечный заряд помещают в самое нижнее положение и сообщают ему начальную скорость v_0, направленную влево, перпендикулярно оси цилиндра. Найдите максимальную скорость заряда $v_{\text{макс}}$ в процессе дальнейшего движения;
3. при каких значениях v_0 точечный заряд совершит полный оборот?

▲ **Решение. Что происходит.** Главная идея — принцип суперпозиции и то, что внутри проводника поля нет. Индуцированные заряды металлического цилиндра внутри него создают поле, которое в точности гасит внешнее, то есть однородное поле $-\vec{E}_0$. Те же заряды на непроводящем цилиндре создают внутри то же поле $-\vec{E}_0$ — поле зависит только от расположения зарядов. Дальше задача механическая: на заряд действуют две постоянные силы, $m\vec{g}$ и $-q\vec{E}_0$, которые складываются в одну «эффективную силу тяжести». Это движение по окружности в однородном поле (как шарик в желобе), только «низ» повёрнут.

Обозначения. θ — угол радиуса заряда к горизонту (от правой точки против часовой стрелки, рис. 2); $\vec{E} = -\vec{E}_0$ — поле внутри непроводящего цилиндра; $\vec{g}_{\text{эф}}$ — эффективное ускорение; N — сила реакции стенки.

1. Поле внутри непроводящего цилиндра. В металлическом цилиндре в равновесии поле равно нулю. По принципу суперпозиции оно складывается из внешнего $\vec{E}_0$ и поля $\vec{E}_{\text{инд}}$ индуцированных зарядов:

$$\vec{E}_0 + \vec{E}_{\text{инд}} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{E}_{\text{инд}} = -\vec{E}_0.$$

Слева индуцирован отрицательный заряд, справа — положительный (рис. 3), и их поле внутри направлено влево. На непроводящем цилиндре заряды распределены так же, и внешнего поля нет, поэтому внутри него однородное поле $\vec{E} = -\vec{E}_0$: модуль E_0, направление — влево.

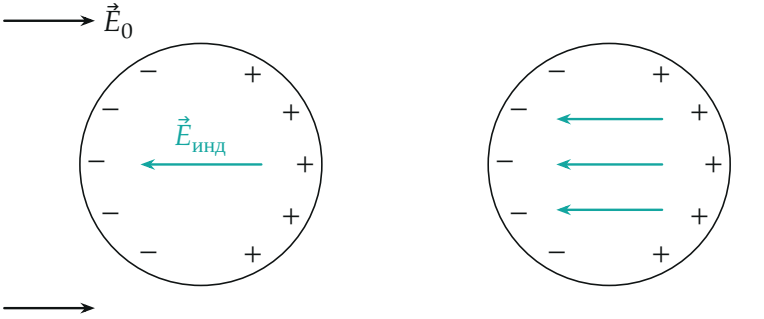

Рис. 3. Индуцированные заряды и их поле внутри.

Пункт 1. Изменение потенциальной энергии. Из крайней левой точки в крайнюю правую заряд проходит $2R$ вдоль поля тяжести горизонтально — работа силы тяжести равна нулю. Электрическая сила $q\vec{E}$ направлена влево, против перемещения на $2R$ вправо, её работа $A_E = -qE_0 \cdot 2R$. Изменение потенциальной энергии равно работе сил поля со знаком минус:

$$\Delta W = -A_E = 2qE_0R.$$

Энергия увеличилась: заряд перенесли против электрической силы.

Пункт 2. Максимальная скорость.

2. Эффективная сила тяжести. Обе силы постоянны, их сумма — тоже постоянная сила (рис. 4):

$$m\vec{g}_{\text{эф}} = m\vec{g} + q\vec{E}, \qquad g_{\text{эф}} = \sqrt{g^2 + \left(\frac{qE_0}{m}\right)^2}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{qE_0}{mg},$$

где α — угол $\vec{g}_{\text{эф}}$ с вертикалью; $\vec{g}_{\text{эф}}$ направлено вниз и влево. Потенциальная энергия в однородном поле $\vec{g}_{\text{эф}}$ — как в поле тяжести, только высота отсчитывается вдоль $-\vec{g}_{\text{эф}}$. Через угол θ (оси x вправо, y вверх, заряд в точке $x = R\cos\theta$, $y = R\sin\theta$):

$$W(\theta) = mgR\sin\theta + qE_0R\cos\theta.$$

Наименьшая энергия $-mg_{эф}R$ — в точке M, куда направлено $\vec{g}_{эф}$ из центра, наибольшая $+mg_{эф}R$ — в диаметрально противоположной точке D.

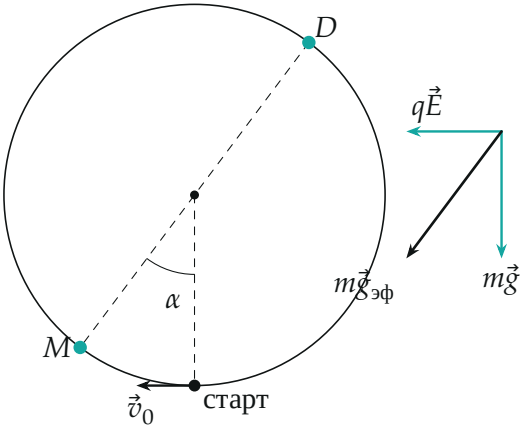

Рис. 4. Эффективная сила тяжести; M — «низ», D — «верх» в поле $\vec{g}_{эф}$.

3. Закон сохранения энергии. Стенка гладкая, сила реакции перпендикулярна скорости и работы не совершает; сохраняется сумма кинетической и потенциальной энергии. Скорость максимальна там, где энергия W минимальна, — в точке M. Из начальной точки ($\theta = -90°$, $W_0 = -mgR$) до точки M:

$$\frac{mv_0^2}{2} - mgR = \frac{mv_{макс}^2}{2} - mg_{эф}R,$$

$$v_{макс} = \sqrt{v_0^2 + 2R\left(\sqrt{g^2 + \left(\frac{qE_0}{m}\right)^2} - g\right)}.$$

Заряд проходит M при любом v_0: M лежит левее нижней точки, а скорость направлена влево.

Пункт 3. Полный оборот.

4. Условие на верхней точке. Заряд движется по стенке, пока стенка давит на него, то есть $N \geq 0$. Опаснее всего точка D: там скорость наименьшая, а $m\vec{g}_{эф}$ направлена к центру, как и $\vec{N}$ (рис. 5). Второй закон

Ньютона в проекции на радиус к центру:

$$N + mg_{\text{эф}} = \frac{mv_D^2}{R}, \qquad N \geq 0 \;\Rightarrow\; v_D^2 \geq g_{\text{эф}} R.$$

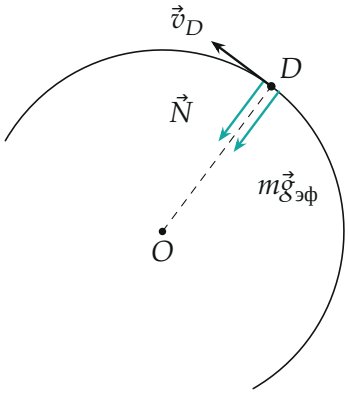

Рис. 5. Силы в точке D: обе направлены к центру.

5. Сохранение энергии от старта до D:

$$\frac{mv_0^2}{2} - mgR = \frac{mv_D^2}{2} + mg_{\text{эф}}R \geq \frac{3}{2}mg_{\text{эф}}R,$$

$$v_0 \geq \sqrt{R\left(2g + 3\sqrt{g^2 + \left(\frac{qE_0}{m}\right)^2}\right)}.$$

Если D пройдена, то пройдены и все остальные точки: в них энергия W меньше, скорость больше, а прижимающая составляющая $m\vec{g}_{\text{эф}}$ слабее тянет от стенки.

Обратите внимание: точка отрыва — не верхняя точка цилиндра, а точка D, повёрнутая вправо на угол α; если проверять верх цилиндра, получится неверный ответ.

Проверка. Размерность: $[qE_0/m] = \text{м}/\text{с}^2$, под корнем $R \cdot g$ — $\text{м}^2/\text{с}^2$. Предел $E_0 \to 0$: $g_{\text{эф}} \to g$, $v_{\text{макс}} \to v_0$ (самая нижняя точка и есть старт), а условие оборота $v_0 \geq \sqrt{5gR}$ — известный ответ для «мёртвой петли».

Пункт 1 тоже следует из $W(\theta)$: $W(0) - W(\pi) = qE_0R - (-qE_0R) = 2qE_0R$.

Физический смысл: внутри заряженного цилиндра однородное поле, и вместе с тяжестью оно лишь наклоняет «вертикаль»: вся задача — петля в повёрнутом поле тяжести $g_{\text{эф}}$.

Ответ. 1) $\Delta W = 2qE_0R$; 2) $v_{\text{макс}} = \sqrt{v_0^2 + 2R\left(\sqrt{g^2 + (qE_0/m)^2} - g\right)}$; 3) $v_0 \geq \sqrt{R\left(2g + 3\sqrt{g^2 + (qE_0/m)^2}\right)}$.