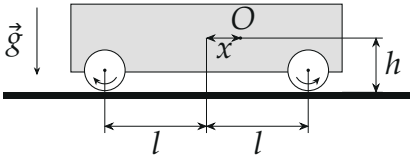
Электрическая тележка

Задача 3. [ВсОШ 2021/22, заключительный этап, 10 класс, задача 3] «Электрическая тележка».

Электрическая тележка для перемещения грузов состоит из двух цилиндрических колёс и корпуса. Расстояние между осями колёс $2l$. Центр масс тележки O выше пола на h и на x ($x > 0$) правее средней точки между осями. Электродвигатели сообщают колёсам быстрое встречное вращение, как показано на рисунке. Коэффициент трения колёс о пол μ ($\mu < l/h$). Массой колёс можно пренебречь. Ускорение свободного падения g.



Определите:

1. ускорение тележки в начальный момент времени, если её колёса не отрываются от пола;
2. при каком(их) значении(ях) возможно движение без отрыва колёс.

▲ **Решение. Что происходит.** Колёса вращаются быстро и навстречу друг другу, поэтому их нижние точки скользят по полу: трение — это трение скольжения μN, а направлено оно против скольжения нижней точки. Левое колесо толкается вправо, правое — влево, и тележку тянет туда, где сила трения больше, то есть туда, где колесо сильнее прижато к полу. Прижатие колёс зависит от положения центра масс и от того, что горизонтальные силы трения приложены у пола, ниже центра масс, и стремятся опрокинуть тележку. Это задача класса «динамика поступательно движущегося тела»: второй закон Ньютона для центра масс плюс равенство нулю суммы моментов относительно центра масс (тележка не поворачивается).

Обозначения. m — масса тележки; $N_л$, $N_п$ — силы нормальной реакции пола на левое и правое колёса; $F_л = \mu N_л$, $F_п = \mu N_п$ — силы трения;

ось X — вправо, ось Y — вверх; a — проекция ускорения тележки на ось X.

1. Направления сил трения. Левое колесо вращается по часовой стрелке: его нижняя точка движется относительно оси влево. Колесо вращается быстро, поэтому скорость нижней точки относительно пола тоже направлена влево (скорость самой тележки в начальный момент равна нулю, а дальше мала по сравнению со скоростью обода). Сила трения скольжения направлена против скольжения — вправо. У правого колеса, вращающегося против часовой стрелки, всё наоборот: трение влево (рис. 2).

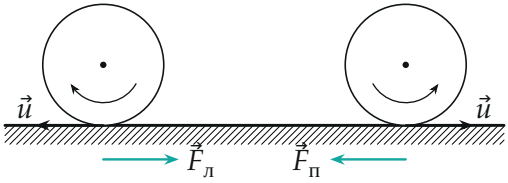


Рис. 2. Скорость скольжения нижней точки $\vec{u}$ и сила трения (приложена к колесу в точке касания; стрелки сдвинуты ниже пола, чтобы не закрывать его).

2. Второй закон Ньютона для тележки (силы — на рис. 3; колёса невесомы, поэтому силы пола передаются корпусу без потерь):

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}_л + \vec{N}_п + \vec{F}_л + \vec{F}_п.$$

Тележка не подпрыгивает, поэтому $a_Y = 0$. В проекциях:

$$Y: \quad N_л + N_п - mg = 0; \qquad X: \quad ma = \mu N_л - \mu N_п.$$

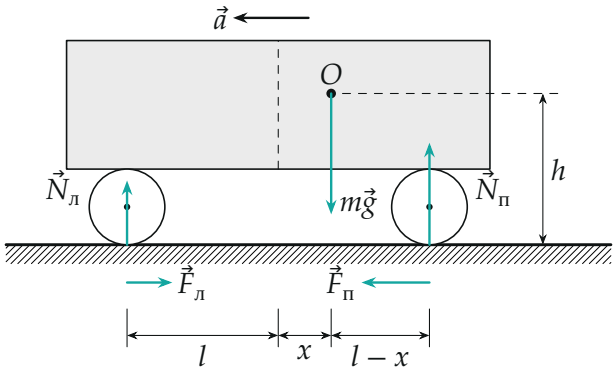


Рис. 3. Силы, действующие на тележку, и плечи относительно центра масс O.

3. Уравнение моментов. Тележка движется поступательно (не поворачивается), поэтому сумма моментов всех сил относительно центра масс равна нулю — даже при ускоренном движении. Выбираем именно центр масс: относительно него сила тяжести не даёт момента, и не нужны силы инерции. Плечи (рис. 3): $N_л$ — $l+x$, $N_п$ — $l-x$, обе силы трения — h. Против часовой стрелки поворачивают $N_п$ и $F_л$ (трение у пола вправо под центром масс), по часовой — $N_л$ и $F_п$:

$$N_п(l-x)+\mu N_л h = N_л(l+x)+\mu N_п h \;\Rightarrow\; N_п(l-x-\mu h) = N_л(l+x-\mu h).$$

4. Силы реакции. Вместе с $N_л + N_п = mg$:

$$N_п = \frac{mg\,(l-\mu h+x)}{2(l-\mu h)}, \qquad N_л = \frac{mg\,(l-\mu h-x)}{2(l-\mu h)}.$$

Правое колесо прижато сильнее: под ним центр масс, и вдобавок момент сил трения разгружает левое колесо.

Пункт 1. Ускорение. Из проекции на X:

$$a = \mu\frac{N_л - N_п}{m} = -\frac{\mu g x}{l-\mu h}.$$

По условию $\mu < l/h$, знаменатель положителен, и $a < 0$: тележка разго-

няется влево с ускорением $\dfrac{\mu g x}{l-\mu h}$ — туда, куда толкает сильнее прижатое правое колесо.

Пункт 2. Условие безотрывного движения. Колесо касается пола, пока сила реакции на него положительна. $N_{\text{п}} > 0$ при $x > 0$ выполняется всегда, а

$$N_{\text{л}} > 0 \;\Leftrightarrow\; x < l - \mu h.$$

Значит, без отрыва колёс тележка может двигаться при $0 < x < l - \mu h$, или, что то же, при $\mu < \dfrac{l-x}{h}$. При $x \to l-\mu h$ левое колесо разгружается полностью ($N_{\text{л}} \to 0$), а ускорение растёт до $\mu g\, x/(l-\mu h) \to \mu g$ (рис. 4); при большем x левое колесо приподнимается.

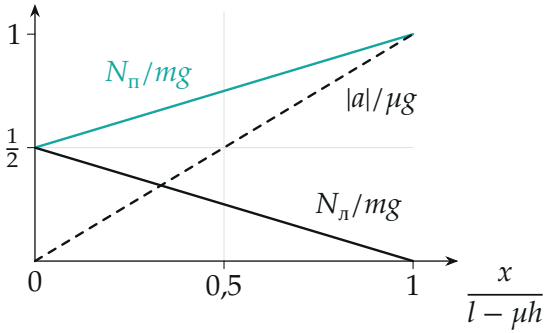


Рис. 4. Реакции пола и ускорение в зависимости от смещения центра масс.

Обратите внимание: момент сил трения относительно центра масс не нулевой, хотя сами силы трения направлены навстречу: они разные по модулю, и их разность $\mu(N_{\text{п}} - N_{\text{л}})$ на плече h даёт момент, который «приподнимает» левое колесо. Отсюда в ответе $l - \mu h$, а не l.

Проверка. Размерность: $\mu g x/(l-\mu h)$ — м/с^2. Предел $x = 0$: центр масс посередине, колёса прижаты одинаково, трения равны и уравновешивают друг друга, $a = 0$. Предел $h \to 0$: моменты сил трения исчезают, $N_{\text{л,п}} = \frac{mg}{2}(1 \mp \frac{x}{l})$, $a = -\mu g x/l$ — как у тела на двух опорах. Второй способ: моменты относительно точки пола посередине между колёсами с силой инерции $-m\vec{a}$ в центре масс дают $l(N_{\text{п}} - N_{\text{л}}) = mgx - mah$ и тот же ответ.

Физический смысл: тележка едет в сторону колеса, которое сильнее прижато к полу, а само ускорение ещё больше перегружает это колесо — обратная связь, усиливающая неравенство нагрузок (множитель $1/(l-\mu h)$).

Ответ. 1) $a = \dfrac{\mu g x}{l-\mu h}$, направлено влево; 2) $0 < x < l - \mu h$ (то есть $\mu < \dfrac{l-x}{h}$).