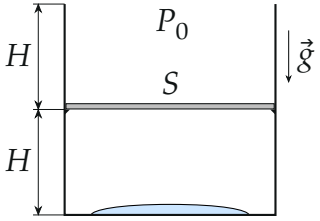
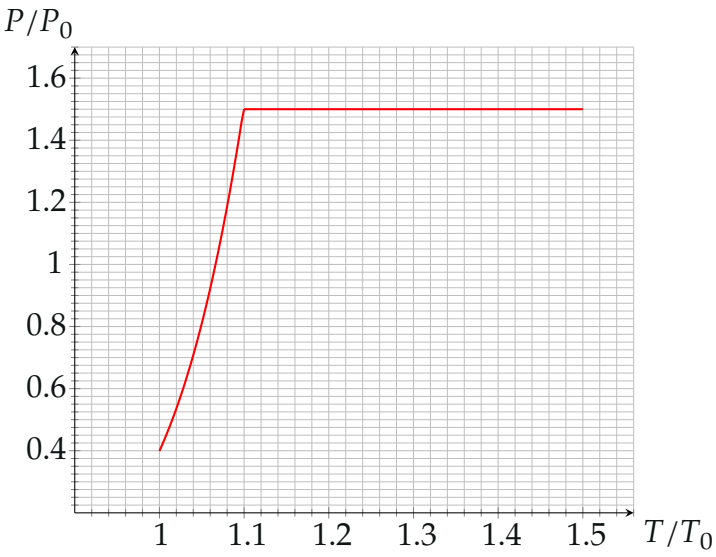
Неизвестная жидкость под поршнем

Задача 4. [ВсОШ 2021/22, заключительный этап, 10 класс, задача 4] «Неизвестная жидкость под поршнем».

В атмосфере с давлением $p_0 = 10^5$ Па расположен вертикальный цилиндрический сосуд сечения $S = 0{,}01$ м^2 и высоты $2H$ ($H = 1$ м). Вдоль стенок сосуда может перемещаться без трения герметичный поршень. Стенки сосуда и поршень не проводят тепло. Изначально поршень покоится на небольших опорах, расположенных на высоте H над дном сосуда. Из-под поршня выкачивают весь воздух и помещают туда некоторое количество жидкости. После установления термодинамического равновесия температура содержимого сосуда оказалась равна $T_0 = 350$ К. Затем включают нагреватель, и через дно сосуда содержимое под поршнем медленно нагревается. В процессе нагрева измеряют температуру и давление под поршнем. Когда низ поршня достигает отметки $2H$, нагрев прекращают. График полученной зависимости от начала нагрева и до его окончания представлен на рисунке.





Удельная теплота парообразования жидкости при температуре $1{,}1T_0$ равна $L = 2{,}2$ МДж/кг. Молярная масса жидкости $\mu = 18$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К), ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2. Пар жидкости можно считать идеальным многоатомным газом. Объём жидкости много меньше SH. Определите:

1. массу M поршня;
2. массу m_0 содержимого под поршнем (суммарно во всех агрегатных состояниях);
3. количество теплоты Q, подведённой к сосуду начиная с момента отрыва поршня от опор и до момента окончания нагрева.

▲ **Решение. Что происходит.** Под поршнем нет воздуха — только жидкость и её пар. Пока поршень лежит на опорах, объём постоянен, и в сосуде насыщенный пар над жидкостью: давление растёт по кривой насыщения (участок AB графика, рис. 3). В точке B давление пара сравнялось с тем, что нужно для подъёма поршня, $1{,}5p_0$, и дальше давление постоянно (участок BC). Пока жидкость не выкипела, пар насыщенный, и при постоянном давлении постоянна и температура: поршень поднимается, а точка на графике $p(T)$ стоит в B — вся теплота идёт на испарение. Когда жидкость кончилась (точка D), сухой пар греется изобарно

до $1{,}5T_0$. Класс задачи — «насыщенный пар»: предположение (есть ли жидкость) → проверка по уравнению состояния.

Обозначения. A — начало нагрева, B — отрыв поршня ($1{,}1T_0$, $1{,}5p_0$, объём SH), D — жидкость выкипела, C — конец нагрева ($1{,}5T_0$, $1{,}5p_0$, объём $2SH$); m_B — масса пара в точке B; $\nu = m_0/\mu$ — количество вещества содержимого.

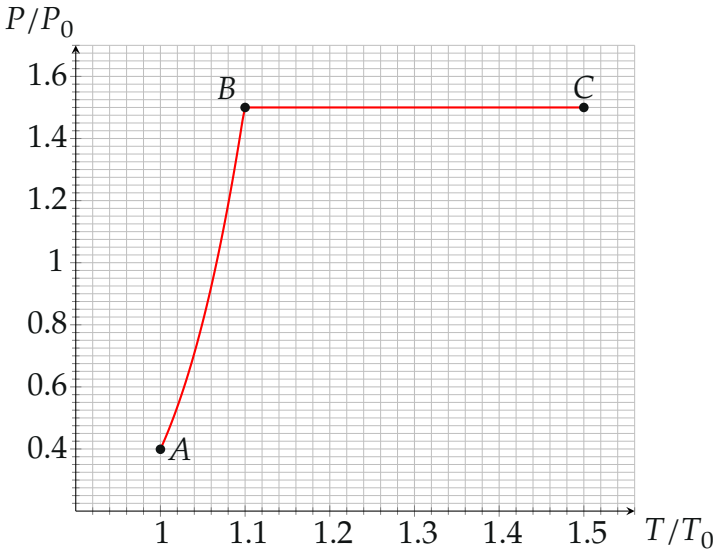


Рис. 3. Точки процесса на графике организаторов.

Пункт 1. Масса поршня.

1. Равновесие поршня на участке BC**.** Поршень движется медленно (нагрев медленный), поэтому его ускорение равно нулю. Второй закон Ньютона для поршня в проекции на вертикаль: сила давления пара снизу уравновешивает силу тяжести и силу давления атмосферы сверху (опоры уже не давят, рис. 4):

$$1{,}5p_0S = Mg + p_0S \;\Rightarrow\; M = \frac{p_0S}{2g} = \frac{10^5 \cdot 0{,}01}{2 \cdot 9{,}8}\ \text{кг} \approx 51\ \text{кг}.$$

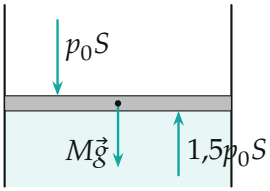


Рис. 4. Силы, действующие на поршень на участке BC.

Пункт 2. Масса содержимого.

2. Конечное состояние C**.** Давление насыщенного пара растёт с температурой; при $1{,}1T_0$ оно уже $1{,}5p_0$, а при $1{,}5T_0$ — больше. В точке C давление $1{,}5p_0$, значит, пар ненасыщенный, жидкости нет, и всё вещество — пар объёмом $2SH$. Уравнение Менделеева–Клапейрона:

$$1{,}5p_0 \cdot 2SH = \frac{m_0}{\mu} R \cdot 1{,}5T_0 \;\Rightarrow\; m_0 = \frac{2\mu p_0 SH}{RT_0} \approx 12{,}4 \text{ г}.$$

Пункт 3. Теплота.

3. Сколько пара в момент отрыва. В точке B пар насыщенный при $1{,}1T_0$, объём SH:

$$m_B = \frac{\mu \cdot 1{,}5p_0 SH}{R \cdot 1{,}1T_0} = \frac{1{,}5}{2{,}2} m_0 = \frac{15}{22} m_0 \approx 8{,}4 \text{ г} < m_0.$$

Жидкость ещё есть ($m_0 - m_B = \frac{7}{22} m_0 \approx 3{,}9$ г), поэтому подъём идёт в два этапа (рис. 5 и 6): $B \to D$ — кипение при $T = 1{,}1T_0$ и $p = 1{,}5p_0$, $D \to C$ — изобарный нагрев сухого пара. Объём в точке D, где выкипела последняя капля: $V_D = 2SH \cdot \frac{1{,}1}{1{,}5} \approx 1{,}47\, SH$.

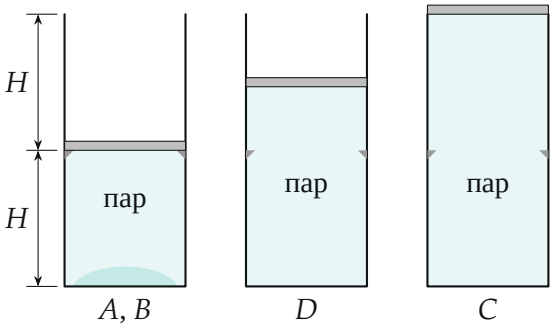


Рис. 5. Содержимое сосуда: на опорах (жидкость и пар), в момент D (жидкость выкипела), в конце.

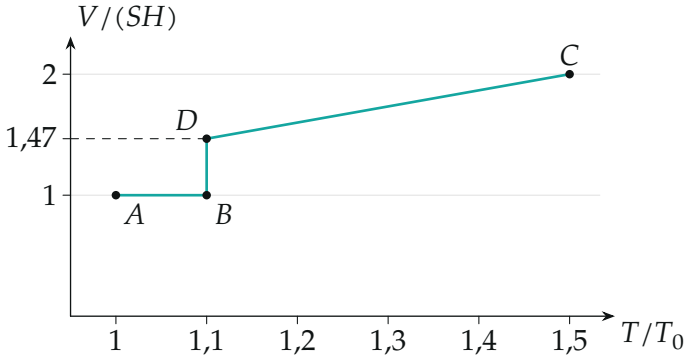


Рис. 6. Объём содержимого от температуры: на отрезке BD температура стоит.

4. Этап $B \to D$**.** Удельная теплота парообразования определена для испарения при постоянном давлении: она уже включает работу пара по подъёму поршня и атмосферы. Поэтому теплота этапа

$$Q_1 = L(m_0 - m_B) = \frac{7}{22} L m_0 = \frac{7\mu L}{11RT_0}\, p_0 SH \approx 8{,}7 \text{ кДж}.$$

5. Этап $D \to C$**.** Первое начало термодинамики для изобарного нагрева пара: $Q_2 = \Delta U + p\Delta V = \nu c_V \Delta T + \nu R \Delta T = \nu c_p \Delta T$. Для многоатомного газа $c_V = 3R$, $c_p = 4R$:

$$Q_2 = 4R \cdot \frac{m_0}{\mu}\,(1{,}5T_0 - 1{,}1T_0) = 4 \cdot \frac{2p_0 SH}{T_0} \cdot 0{,}4T_0 = \frac{16}{5} p_0 SH = 3{,}2 \text{ кДж}.$$

6. Итог. Стенки и поршень не проводят тепло, поэтому вся подведённая теплота идёт на эти два этапа:

$$Q = Q_1 + Q_2 = p_0 SH \left(\frac{7\mu L}{11RT_0} + \frac{16}{5} \right) \approx (8{,}7 + 3{,}2) \text{ кДж} \approx 11{,}9 \text{ кДж}.$$

Обратите внимание: на графике $p(T)$ этап кипения $B \to D$ сжат в одну точку B, хотя на нём поршень проходит почти половину пути и уходит

основная часть теплоты (8,7 из 11,9 кДж). Его видно только на графике $V(T)$ (рис. 6).

Проверка. Размерность: $\mu L/(RT_0)$ безразмерно, p_0SH — Дж. Согласованность: $V_D = 1{,}47SH$ лежит между SH и $2SH$ — предположение о двух этапах верно. Второй способ для Q_2: работа пара $1{,}5p_0(2-1{,}47)SH = 0{,}8p_0SH$, изменение внутренней энергии $3\nu R\cdot 0{,}4T_0 = 2{,}4p_0SH$, сумма $3{,}2p_0SH$.

Физический смысл: пока есть жидкость, нагреватель лишь превращает её в пар при неизменных p и T, и только сухой пар греется дальше.

Ответ. 1) $M = \dfrac{p_0S}{2g} \approx 51$ кг; 2) $m_0 = \dfrac{2\mu p_0SH}{RT_0} \approx 12{,}4$ г; 3) $Q = p_0SH\left(\dfrac{7\mu L}{11RT_0}+\dfrac{16}{5}\right) \approx 11{,}9$ кДж.