Термоисточник

Задача 5. [ВсОШ 2021/22, заключительный этап, 10 класс, задача 5] «Термоисточник».

Источник состоит из соединённых последовательно идеального источника постоянного напряжения $\mathcal{E}$ и терморезистора, сопротивление которого зависит от температуры по закону

$$R = R_0(1 + \alpha(t - t_0)),$$

где R_0 — сопротивление резистора при температуре $t_0 = 0°\text{C}$, t — установившаяся температура резистора, α — постоянный коэффициент.

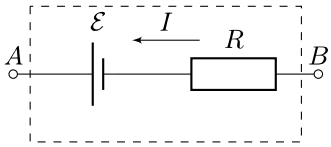
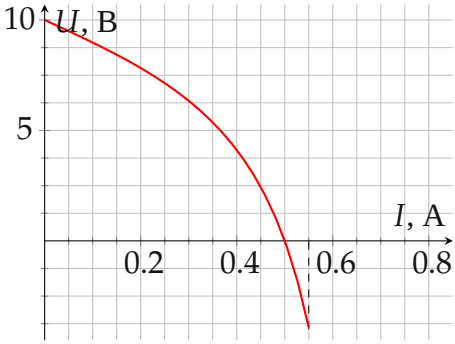


Рис. 7

На графике приведена нагрузочная кривая источника, то есть зависимость установившегося напряжения U_{AB} между его клеммами от силы протекающего через него тока I. При протекании тока $I_1 = 0{,}55$ А цепь разрывается, так как резистор плавится. Температура плавления известна и равна $t_{\text{пл}} = 306°\text{C}$. Мощность тепловых потерь в окружающую среду от нагретого до температуры t резистора равна $N = \beta(t - t_{\text{среды}})$, где β — постоянный неизвестный коэффициент. Считайте, что температура окружающей среды $t_{\text{среды}} = t_0$. Определите:

1. напряжение $\mathcal{E}$ идеального источника;
2. сопротивление R_0;
3. напряжение U_{AB} между клеммами A и B, если к ним подключить резистор сопротивлением 10 Ом;
4. величину α;
5. какую силу тока гарантированно не сможет пропускать аналогичный резистор, имеющий те же значения параметров R_0 и α, но очень высокую температуру плавления.



▲ **Решение. Что происходит.** Ток греет терморезистор, тот нагревается до температуры, при которой выделяемая мощность I^2R равна теплоотдаче $\beta(t - t_0)$, а сопротивление при этом растёт с температурой. Чем больше ток, тем горячее резистор и тем больше на нём падает напряжения — поэтому нагрузочная кривая $U_{AB} = \mathcal{E} - IR$ загибается вниз. Главная идея — из теплового баланса выразить R через ток; тогда нагрузочная кривая записывается формулой с двумя параметрами, R_0 и комбинацией β/α, которые читаются с графика. Это задача класса «нелинейный элемент»: рабочая точка — пересечение кривой с прямой нагрузки.

Обозначения. $\tau = t - t_0$ — перегрев резистора; K — рабочая точка с нагрузкой 10 Ом; $I_{\text{макс}}$ — предел тока при сколь угодно сильном нагреве.

1. Тепловой баланс. В установившемся режиме температура не меняется, вся джоулева мощность уходит в среду:

$$I^2R_0(1 + \alpha\tau) = \beta\tau \;\Rightarrow\; \tau = \frac{I^2R_0}{\beta - \alpha I^2R_0},$$

$$R = R_0(1 + \alpha\tau) = \frac{R_0}{1 - \dfrac{\alpha R_0}{\beta} I^2}.$$

Решение имеет смысл, пока знаменатель положителен, то есть $I^2 < \beta/(\alpha R_0)$.

2. Нагрузочная кривая. Второе правило Кирхгофа для источника: напряжение на клеммах — ЭДС минус падение напряжения на терморе-

зисторе,

$$U_{AB} = \mathcal{E} - IR = \mathcal{E} - \frac{IR_0}{1 - I^2/I_{\text{макс}}^2}, \qquad I_{\text{макс}}^2 = \frac{\beta}{\alpha R_0}.$$

Качественно: при малом токе резистор почти не греется, и кривая идёт как прямая $\mathcal{E} - IR_0$; с ростом тока R растёт всё быстрее, и кривая уходит вниз (рис. 3).

Пункт 1. ЭДС. При $I = 0$ падения напряжения нет: $U_{AB}(0) = \mathcal{E}$. По графику $\mathcal{E} = 10$ В.

Пункт 2. Сопротивление R_0. При малом токе $U_{AB} \approx \mathcal{E} - IR_0$: наклон касательной к кривой в точке $I = 0$ равен $-R_0$. По графику касательная проходит через $(0;\ 10\text{ В})$ и $(0{,}1\text{ А};\ 9\text{ В})$: $R_0 = 10$ Ом.

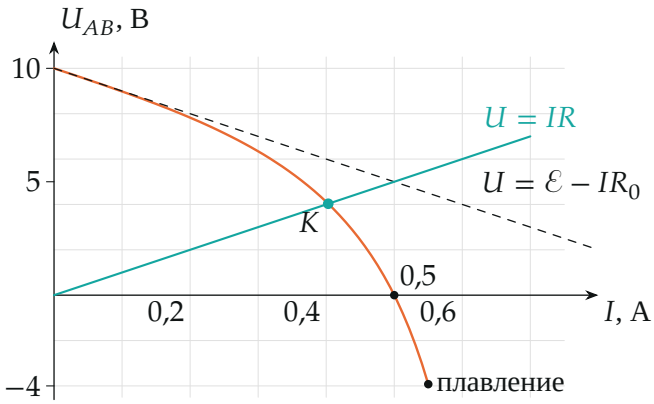


Рис. 3. Нагрузочная кривая (по формуле с найденными $\mathcal{E}$, R_0, β/α), касательная в нуле и прямая нагрузки $U = IR$, $R = 10$ Ом.

Пункт 3. Нагрузка 10 **Ом.** Через нагрузку течёт тот же ток I, и по закону Ома $U_{AB} = IR_{\text{н}}$. Рабочая точка K — пересечение нагрузочной кривой с прямой $U = 10I$ (рис. 3). С графика (и из уравнения $10 - \frac{10I}{1-2I^2} = 10I$): $I \approx 0{,}40$ А, $U_{AB} \approx 4{,}0$ В.

Пункт 4. Коэффициент α.

3. Комбинация β/α. В точке $I_0 = 0{,}5$ А кривая пересекает ось: $U_{AB} =$

0, значит, $R = \mathcal{E}/I_0 = 20$ Ом $= 2R_0$. Из формулы шага 1:

$$1 - \frac{\alpha R_0}{\beta} I_0^2 = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \frac{\beta}{\alpha} = 2R_0 I_0^2 = 5{,}0 \text{ Вт}, \qquad I^2_{\text{макс}} = 0{,}5 \text{ А}^2.$$

Другие точки графика дают то же: например, при $I = 0{,}3$ А формула даёт $U_{AB} = 10 - \frac{3}{0{,}82} = 6{,}3$ В — как на графике.

4. Плавление. При $I_1 = 0{,}55$ А резистор нагрелся до $t_{\text{пл}}$. Из теплового баланса шага 1, разделив числитель и знаменатель на α:

$$\tau_{\text{пл}} = \frac{I_1^2 R_0}{\alpha\left(\beta/\alpha - I_1^2 R_0\right)},$$

$$\alpha = \frac{I_1^2 R_0}{\tau_{\text{пл}}\left(\beta/\alpha - I_1^2 R_0\right)} = \frac{3{,}025}{306 \cdot 1{,}975}\ ^\circ\text{C}^{-1} \approx 5{,}0 \cdot 10^{-3}\ ^\circ\text{C}^{-1}.$$

У организаторов в ответе $5{,}1 \cdot 10^{-3}$: результат очень чувствителен к β/α (разность $5{,}0 - 3{,}025$), а аккуратная оцифровка их кривой по всем точкам даёт $\beta/\alpha = 5{,}00$ Вт и $\alpha = 5{,}0 \cdot 10^{-3}\ ^\circ\text{C}^{-1}$.

Пункт 5. Предельный ток. Перегрев $\tau = \frac{I^2 R_0}{\beta - \alpha I^2 R_0}$ растёт с током и обращается в бесконечность при $I \to I_{\text{макс}}$ (рис. 4). Физически: при большой температуре и выделяемая мощность $I^2 R_0 \alpha\tau$, и теплоотдача $\beta\tau$ растут пропорционально τ; если $I^2 R_0 \alpha > \beta$, выделение всегда обгоняет отдачу, и равновесия нет ни при какой температуре — резистор греется неограниченно. Поэтому ток

$$I \geq I_{\text{макс}} = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha R_0}} = \sqrt{\frac{5{,}0}{10}}\ \text{А} \approx 0{,}71\ \text{А}$$

резистор гарантированно не пропустит при любой температуре плавления.

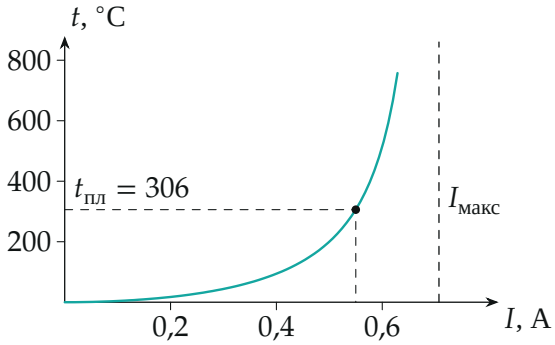


Рис. 4. Установившаяся температура резистора от тока; асимптота — $I_{макс}$.

Обратите внимание: β и α по отдельности из графика не находятся — в нагрузочную кривую входит только их отношение. Второе уравнение даёт плавление.

Проверка. Размерность: $[\beta/\alpha] = \frac{\text{Вт}/^\circ\text{C}}{1/^\circ\text{C}} = \text{Вт}$, $\sqrt{\text{Вт}/\text{Ом}} = \text{А}$. Согласованность: $I_1 = 0{,}55\ \text{А} < I_{макс} = 0{,}71\ \text{А}$ — плавление при конечной температуре возможно. Предел $\alpha \to 0$: $I_{макс} \to \infty$, кривая становится прямой $\mathcal{E} - IR_0$, как у обычного источника с внутренним сопротивлением.

Физический смысл: у терморезистора с положительным α есть «тепловой предел тока» — выше него нагрев идёт лавинообразно, и резистор неизбежно сгорает.

Ответ. 1) $\mathcal{E} = 10$ В; 2) $R_0 = 10$ Ом; 3) $U_{AB} \approx 4{,}0$ В; 4) $\alpha \approx 5{,}0 \cdot 10^{-3}\ ^\circ\text{C}^{-1}$; 5) $I \geq I_{макс} = \sqrt{\beta/(\alpha R_0)} \approx 0{,}71$ А.