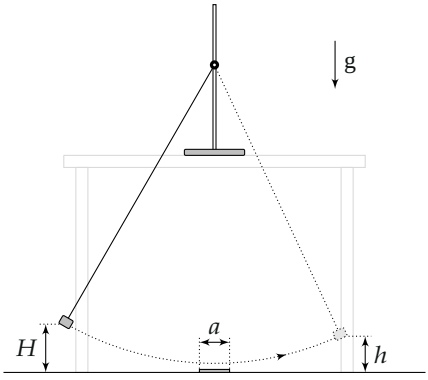
Полёт с препятствием

Задача 1. [ВсОШ 2021/22, заключительный этап, 11 класс, практический тур, задача 1] «Полёт с препятствием».

Оборудование: металлический стержень с неодимовым магнитом на одном и подшипником на другом конце; штатив с лапкой; платформа с пятью проводящими пластинами одинаковой толщины и ширины b, но различной длины a; две измерительные стойки с линейками.

В данной задаче вам предлагается изучить взаимодействие движущегося постоянного магнита с тонкими проводящими пластинками, намагничиваемостью которых можно пренебречь. Для этого используется экспериментальная установка, схематично представленная на рис. 1. К горизонтальной оси на подшипнике прикреплён стержень с постоянным магнитом на конце. В положении равновесия системы под магнитом на небольшом расстоянии от него располагается тонкая проводящая пластинка. В ходе эксперимента исследуется изменение высоты магнита при максимальном отклонении стержня от положения равновесия после его однократного прохождения над пластинкой. Движение магнита происходит в плоскости, параллельной стороне a (рис. 1).



Силами сопротивления воздуха и трения в подшипнике можно пренебречь, как и размерами магнита по сравнению с размерами стержня. Основное взаимодействие магнита с пластинкой происходит на участке порядка размера пластинки, на котором мощностью силы тяжести также можно пренебречь.

1. С учётом указанных приближений, при движении магнита со скоростью v мгновенная мощность энергетических потерь системы равна $P = \alpha v^{n_1}$, где n_1 — постоянная величина, α — коэффициент пропорциональности, зависящий только от относительного расположения магнита и пластинки. Определите n_1 из теоретических соображений. Ответ обоснуйте.

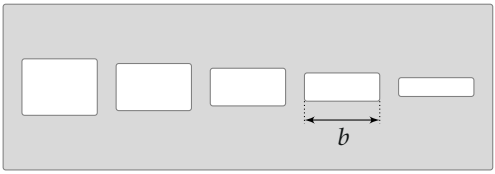
Отклоним стержень от вертикали так, что магнит будет находиться на высоте H от положения равновесия, и отпустим без начальной скорости. После прохождения над пластинкой магнит поднимется на высоту $h < H$. Для измерения значений H и h расположите две измерительные стойки с линейками по разные стороны от штатива. Подбирайте расположения стоек так, чтобы, начиная движение от одной, магнит при последующей остановке едва касался второй линейки. В данной части задачи используйте пластинку с наибольшими размерами.

Указание: для задания расстояния d порядка 1 мм между пластинкой и магнитом в положении равновесия поместите между ним и пластинкой выданную вам линейку измерительной стойки. Кручением гайки, связывающей магнит и стержень, добейтесь плотного контакта линейки с пластинкой и магнитом. Затем уберите линейку.

2. Получите экспериментальную зависимость $h(H)$ (не менее 9 точек) в диапазоне $H \in [10{,}0 \ldots 26{,}0]$ см.
3. Основываясь на теоретических представлениях, полученных в п. 1, получите теоретическую зависимость $h(H)$. Предложите координаты, в которых теоретическая зависимость $h(H)$ является линейной функцией. Постройте график полученной зависимости в предложенных координатах и выясните, является ли описанная теоретическая модель применимой.

Теоретическое описание взаимодействия движущегося магнита с пластиной при разных значениях геометрических параметров установки является сложной задачей, решать которую вам не потребуется.

Изучим взаимодействие движущегося магнита с пластинами с различными значениями длины a.



4. При фиксированном значении $H = 20$ см получите экспериментальную зависимость $h(a)$ (5 точек).
5. Предположим, что разность высот $\Delta H = H - h$ прямо пропорциональна a^{n_2}, где n_2 — постоянная величина. Определите показатель степени n_2.

▲ **Решение. Что происходит.** Стержень с магнитом — маятник, а пластинка под положением равновесия работает как тормоз. Магнит пролетает над неподвижной пластинкой, и в каждой её точке индукция магнитного поля меняется со временем. По закону электромагнитной индукции меняющееся поле порождает вихревое электрическое поле, оно — вихревые токи (токи Фуко) в пластинке, а токи нагревают её. Эту теплоту пластинка берёт из энергии маятника — это и есть потери P.

Главная идея п. 1: траектория и форма поля не зависят от скорости, от скорости зависит только темп, с которым поле «пробегает» через пластинку. Поэтому достаточно проследить цепочку «$v \to \partial\vec{B}/\partial t \to \vec{E} \to \vec{j} \to P$» и в каждом звене понять, во сколько раз оно меняется, когда v растёт в k раз.

Главная идея пп. 2–5: при таком торможении ($P = \alpha v^2$, сила торможения $\sim v$) над пластинкой теряется не доля энергии и не высота, а определённая *скорость*, одна и та же при любой скорости влёта. Отсюда линейная связь $\sqrt{H}$ и $\sqrt{h}$ (п. 3); а как потеря скорости зависит от длины пластинки, находим по графику в двойном логарифмическом масштабе (п. 5).

Класс задачи — масштабирование по скорости при неизменной геометрии (п. 1) и проверка модели линеаризацией: найти координаты, в которых теория даёт прямую, и сравнить её наклон и сдвиг с предсказанными (пп. 2–5).

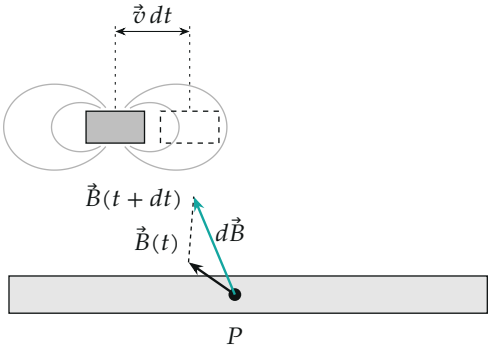
Обозначения. v — скорость магнита; $\vec{B}(\vec{r}, t)$ — индукция поля маг-

нита в точке $\vec{r}$ пластинки (пластинка неподвижна); $\vec{E}$ — электрическое поле в пластинке; $\vec{j}$ — плотность тока; ρ — удельное сопротивление материала пластинки; $p = \rho j^2$ — мощность тепла в единице объёма; $P = \int p\,dV$ — мощность потерь во всей пластинке; H, h — высота нижней точки магнита над положением равновесия до и после пролёта над пластинкой; l — путь вдоль дуги; M_1, M_2 — коэффициенты геометрии маятника: потенциальная энергия вблизи равновесия $M_1 g H$, кинетическая $M_2 v^2/2$ (для лёгкого стержня и точечного магнита $M_1 = M_2 = m$); $\alpha(l)$ — коэффициент в $P = \alpha v^2$; $\beta = \int \alpha\,dl$; $\Delta H = H - h$.

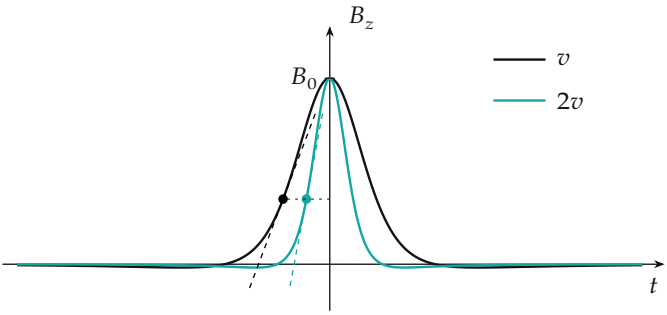
Пункт 1. Показатель n_1.

Шаг 1. Как меняется индукция в точке пластинки. Участок, на котором магнит взаимодействует с пластинкой, много меньше длины стержня, поэтому на нём магнит движется практически по прямой вдоль a, а форма его поля не меняется — смещается только положение магнита. Смещение магнита на $dl = v\,dt$ вперёд — то же самое, что смещение точки наблюдения на dl назад. Пусть $d\vec{B}/dl$ — производная поля магнита по смещению вдоль направления движения; она определяется только положением точки относительно магнита и от v не зависит. Тогда за время dt индукция в точке P меняется на $d\vec{B} = -\dfrac{d\vec{B}}{dl}\,v\,dt$:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -v\,\frac{d\vec{B}}{dl}.$$



Магнит сдвинулся на $\vec{v}\,dt$ (штриховой контур), и вектор индукции в неподвижной точке P пластинки изменился на $d\vec{B}$. Показаны две силовые линии поля магнита; момент магнита для определённости направлен вверх. Тот же факт — на графике: пусть магнит проходит над точкой P с постоянной скоростью. Индукция в P нарастает, достигает максимума, когда магнит над ней, и спадает. При скорости $2v$ та же кривая проходится вдвое быстрее — она сжимается по оси времени вдвое, а высота остаётся прежней. Поэтому в тот момент, когда магнит находится в одном и том же месте, наклон кривой (производная $\partial B/\partial t$) вдвое больше.



Индукция в точке пластинки при пролёте магнита со скоростью v и $2v$. Точки — одно и то же положение магнита: касательная круче вдвое.

Шаг 2. Вихревое электрическое поле. Закон электромагнитной индукции для любого замкнутого контура в пластинке: циркуляция $\vec{E}$ по контуру равна $-d\Phi/dt$, а $d\Phi/dt$ — интеграл от $\partial\vec{B}/\partial t$ по площади контура, то есть пропорционален v. Кроме вихревого поля, на краях пластинки накапливаются заряды: ток не может выйти наружу, и их электростатическое поле гасит нормальную к границе составляющую $\vec{j}$. Все эти условия линейны по источнику $\partial\vec{B}/\partial t$: при той же форме пластинки умножили источник на k — поле $\vec{E}$ вместе с полем зарядов умножилось на k. Значит,

$$E_{\text{вихр}} \sim v.$$

Шаг 3. Ток и мощность тепла. Запишем закон Ома в дифференциальной форме для точки пластинки: $\vec{j} = \vec{E}/\rho$, поэтому $j \sim v$. Теперь мощность тепла. Выделим тонкую трубку вдоль линии тока: длина $dl_{\text{т}}$,

сечение S, ток $I = jS$, сопротивление $dR = \rho\, dl_\text{т}/S$. Закон Джоуля — Ленца для трубки:

$$dP = I^2\, dR = j^2 S^2\, \frac{\rho\, dl_\text{т}}{S} = \rho j^2\, dV, \qquad dV = S\, dl_\text{т},$$

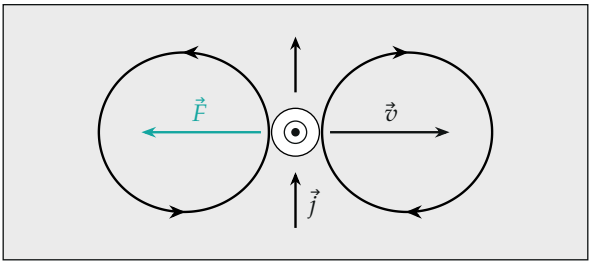
то есть мощность в единице объёма

$$p = \rho j^2 = \frac{E_\text{вихр}^2}{\rho} \sim v^2.$$

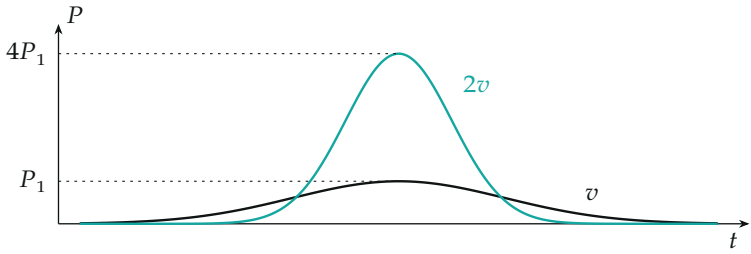
Полная мощность $P = \int \rho j^2\, dV$ — сумма по всей пластинке; при заданном положении магнита форма $\vec{j}$ и ρ те же, меняется только общий множитель v в $\vec{j}$, поэтому $P = \alpha v^2$, где α зависит от расположения магнита относительно пластинки, формы пластинки и ρ, но не от v. Итог цепочки при увеличении скорости в k раз: $\partial\vec{B}/\partial t$ $(\times k)$ $\to$ $\vec{E}$ $(\times k)$ $\to$ $\vec{j}$ $(\times k)$ $\to$ p $(\times k^2)$; квадрат появляется только потому, что ток входит в закон Джоуля — Ленца во второй степени.

Шаг 4. Куда уходит тепло. Сопротивлением воздуха и трением в подшипнике по условию можно пренебречь, поэтому единственный канал потерь энергии системы — джоулево тепло в пластинке. Значит, мощность потерь равна найденной тепловой мощности: $P = \alpha v^2$.

Второй способ — через силу торможения. Вихревые токи в магнитном поле магнита испытывают силу Ампера $d\vec{F} = \vec{j} \times \vec{B}\, dV$. Поле магнита $\vec{B}$ от скорости не зависит, ток $\sim v$, поэтому сила на пластинку $\sim v$, а по третьему закону Ньютона такая же по модулю сила, направленная против скорости, действует на магнит. На рисунке сверху: впереди магнита поток растёт, и ток там течёт так, чтобы его ослабить; позади поток убывает, ток течёт так, чтобы его поддержать; между петлями, под магнитом, токи складываются, и сила на магнит направлена назад (правило Ленца).



Вид сверху: пластинка, магнит (момент направлен на нас) с его вихревыми токами, скорость $\vec{v}$ и сила торможения $\vec{F}$. Мощность силы торможения $Fv \sim v \cdot v = v^2$ — тот же результат, что и в шаге 3, как и должно быть: механическая работа против силы торможения целиком переходит в тепло.



Мощность потерь во времени при пролёте над пластинкой (колоколообразная $\alpha(l)$): при скорости $2v$ пик в 4 раза выше, а длится вдвое меньше — выделяемая за пролёт энергия возрастает только вдвое.

Пункты 2–5. Теперь используем результат п. 1: $P = \alpha v^2$.

Пункты 2 и 4. Как измеряем. Магнит отводим до уровня H на левой стойке и отпускаем без толчка; правую стойку подставляем так, чтобы магнит в верхней точке едва касался её линейки: линейка не мешает движению и служит индикатором остановки. Высоты отсчитываем от нижней точки магнита в положении равновесия: записываем показания обеих линеек и нулевой отсчёт, разность считаем — так сдвиг линеек не попадает в результат. Зазор $d \approx 1$ мм задаём линейкой-прокладкой и держим одним и тем же: α сильно зависит от расстояния до пластинки. Каждое h повторяем несколько раз: оно воспроизводится, разброс

— отсчёт по линейке, около ± 2 мм. Диапазон H — от 101 до 281 мм (требовалось не менее 150 мм), 10 точек.

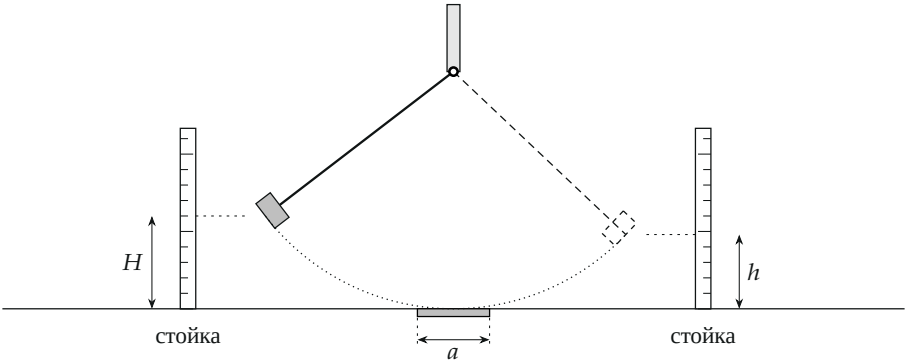


Схема опыта: две стойки с линейками по разные стороны от штатива; пластинка длиной a под положением равновесия. Штрихами показано положение стержня после пролёта. Данные — из решения организаторов (поправка на положение магнита относительно линейки учтена); в последних столбцах — величины для п. 3.

H, мм	h, мм	$\sqrt{H}$	$\sqrt{h}$	$\sqrt{H}-\sqrt{h}$	$\Delta H/\sqrt{H}$
281	228	16,76	15,10	1,66	3,16
260	212	16,12	14,56	1,56	2,98
241	196	15,52	14,00	1,52	2,90
222	178	14,90	13,34	1,56	2,95
201	160	14,18	12,65	1,53	2,89
182	142	13,49	11,92	1,57	2,96
161	125	12,69	11,18	1,51	2,84
141	107	11,87	10,34	1,53	2,86
122	96	11,05	9,80	1,25	2,35
101	72	10,05	8,49	1,56	2,89

Погрешность отсчёта $\delta H = \delta h = 2$ мм, поэтому $\delta\sqrt{H} = \delta H/(2\sqrt{H}) = 0{,}06 \ldots 0{,}12$ $\sqrt{\text{мм}}$.

Пункт 3. Теоретическая зависимость $h(H)$.

Шаг 1. Закон изменения энергии для прохождения над пластинкой. Рассмотрим малый путь dl над пластинкой. Вблизи положения равновесия кинетическая энергия системы $M_2v^2/2$, а мощностью силы тяжести по условию пренебрегаем, поэтому за время dt кинетическая энергия уменьшается на тепло $P\,dt$:

$$M_2v\,dv = -\alpha v^2\,dt.$$

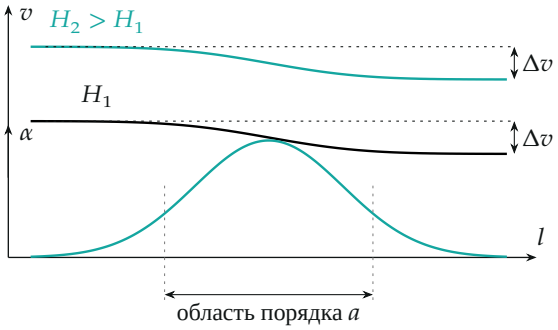
Зачем делим на v: тогда пропадает зависимость от скорости. Сократим на v и учтём $v\,dt = dl$:

$$M_2\,dv = -\alpha\,dl.$$

Шаг 2. Интегрирование. Суммируя по всему пути над пластинкой от входа в область взаимодействия ($v = v_0$) до выхода ($v = v_1$), получаем

$$M_2\,(v_0 - v_1) = \beta, \qquad \beta = \int \alpha\,dl.$$

Здесь $\alpha(l)$ зависит только от положения магнита над пластинкой, поэтому β — число, определяемое только пластинкой и зазором и *не зависящее от* v_0. Итак, любой маятник теряет над одной и той же пластинкой одну и ту же скорость $\Delta v = \beta/M_2$. Качественно: быстрый магнит тормозится сильнее ($P \sim v^2$), но пролетает область быстрее (время $\sim 1/v$), и эти эффекты уравновешивают друг друга.



Скорость при пролёте над пластинкой для высот $H_1 < H_2$: кривые параллельны, Δv одинакова. Внизу — $\alpha(l)$. ***Шаг 3. Связь скоростей с высотами.***

Закон сохранения энергии при спуске от высоты H до положения равновесия (до пластинки трение нет) и при подъёме на высоту h после неё: $M_1gH = M_2v_0^2/2$ и $M_1gh = M_2v_1^2/2$, откуда

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gM_1}{M_2}}\,\sqrt{H}, \qquad v_1 = \sqrt{\frac{2gM_1}{M_2}}\,\sqrt{h}.$$

Подставим в результат шага 2:

$$\sqrt{\frac{2gM_1}{M_2}}\,(\sqrt{H} - \sqrt{h}) = \frac{\beta}{M_2} \implies \boxed{\sqrt{h} = \sqrt{H} - c, \quad c = \frac{\beta}{\sqrt{2gM_1M_2}}}$$

— это и есть теоретическая зависимость, $h = (\sqrt{H} - c)^2$ при $H > c^2$. В координатах $x = \sqrt{H}$, $y = \sqrt{h}$ она линейна: прямая $y = kx + b$ с наклоном $k = 1$ и сдвигом $b = -c < 0$. Заметим: линейной оказывается именно связь корней, а не высот — линейно складываются скорости, а скорость пропорциональна $\sqrt{H}$.

Второй способ (проверка шага 3 без корней). Разложим: $\Delta H = H - h = 2c\sqrt{H} - c^2$, и при $c \ll \sqrt{H}$ потеря высоты $\Delta H \approx 2c\sqrt{H}$ растёт как $\sqrt{H}$, то есть как скорость влёта — это то же, что потеря энергии за пролёт $\sim v$ (п. 1). В таблице столбец $\Delta H/\sqrt{H}$ почти постоянен и равен $2c \approx 3{,}0$ $\sqrt{\text{мм}}$, как и должно быть.

Шаг 4. Обработка и вывод о применимости. Нанесём точки $(\sqrt{H}, \sqrt{h})$ на график, проведём прямую по методу наименьших квадратов (МНК): для $n = 10$ точек $\bar{x} = 13{,}66$, $\bar{y} = 12{,}14$, $S_{xx} = \sum(x_i - \bar{x})^2 = 45{,}0$,

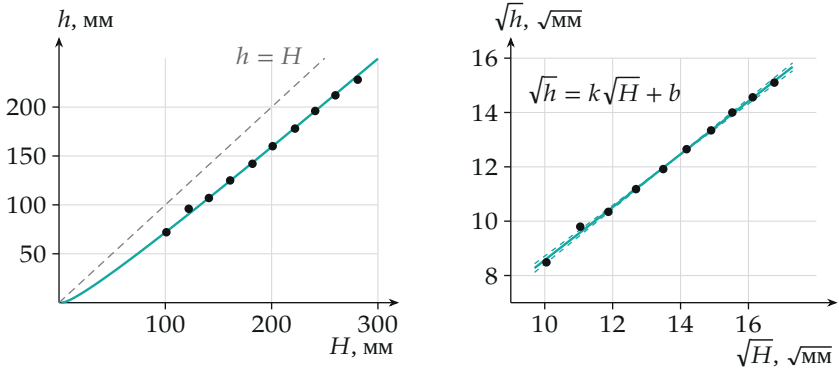
$$k = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{S_{xx}} = 0{,}974, \qquad b = \bar{y} - k\bar{x} = -1{,}18.$$

Остаточный разброс $s = \sqrt{\sum r_i^2/(n-2)} = 0{,}096$, откуда $\sigma_k = s/\sqrt{S_{xx}} = 0{,}014$, $\sigma_b = s\sqrt{1/n + \bar{x}^2/S_{xx}} = 0{,}20$. С коэффициентом Стьюдента 2,3 (вероятность 0,95, 8 степеней свободы) и запасом на систематику отсчё-

та

$$k = 0{,}97 \pm 0{,}04, \qquad b = -1{,}2 \pm 0{,}5\ \sqrt{\text{мм}}.$$

Взвешенная подгонка с ± 2 мм даёт то же: $0{,}972 \pm 0{,}017$. На графике — прямая МНК и две крайние (наклоны $k \pm 0{,}04$).



Слева — опыт $h(H)$ (усы ± 2 мм меньше значка), штрих — $h = H$ (потерь нет), бирюзовая кривая — теория $h = (\sqrt{H} - c)^2$ при $c = 1{,}53$. Справа — те же точки в координатах $(\sqrt{H}, \sqrt{h})$: МНК-прямая и крайние прямые. Теория предсказывает $k = 1$, опыт даёт $0{,}97 \pm 0{,}04$: совпадают в пределах погрешности, и точки ложатся на прямую в пределах ± 2 мм, так что *модель применима*. Выбивается точка $H = 122$ мм (h на 5 мм больше ожидаемого); без неё $k = 0{,}991 \pm 0{,}007$.

Если положить $k = 1$ точно, то c — среднее значение $\sqrt{H} - \sqrt{h}$ по таблице: $c = 1{,}53 \pm 0{,}03\ \sqrt{\text{мм}}$. Физически это потеря скорости $\Delta v = c\sqrt{2gM_1/M_2} \approx 0{,}21$ м/с (при $M_1 \approx M_2$), то есть около 10 % от скорости влёта ≈ 2 м/с при $H = 200$ мм.

Пункты 4 и 5. Зависимость от длины пластинки. Фиксируем $H = 200$ мм и последовательно ставим пять пластинок. Данные и величины для обработки ($\Delta H = 200 - h$, мм; погрешность $\delta(\Delta H) = \sqrt{2} \cdot 2 \approx 3$ мм,

$\delta a = 1$ мм):

a, мм	h, мм	ΔH, мм	$\ln a$	$\ln \Delta H$
30	161	39	3,401	3,664
25	165	35	3,219	3,555
20	170	30	2,996	3,401
15	179	21	2,708	3,045
10	186	14	2,303	2,639

Идея обработки. Из п. 3 при фиксированном H потеря высоты $\Delta H \approx 2c\sqrt{H}$ пропорциональна c, то есть $\beta = \int \alpha\, dl$: чем длиннее пластинка, тем больше путь над ней. Пусть $\Delta H = Aa^{n_2}$; тогда $\ln \Delta H = \ln A + n_2 \ln a$ — в координатах $(\ln a, \ln \Delta H)$ прямая с наклоном n_2 (множитель A и единицы a на наклон не влияют).

МНК для $n = 5$ точек: $\overline{\ln a} = 2{,}925$, $\overline{\ln \Delta H} = 3{,}261$, $S_{xx} = 0{,}753$,

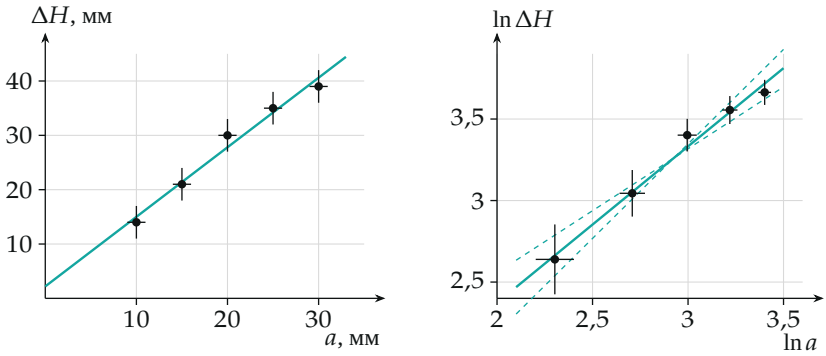
$$n_2 = k_2 = 0{,}960, \qquad \ln A = 0{,}454, \qquad \sigma_k = 0{,}063.$$

При 3 степенях свободы коэффициент Стьюдента 3,2, поэтому $k_2 = 0{,}96 \pm 0{,}20$. Взвешенная подгонка с погрешностями точек (усы) даёт $0{,}89 \pm 0{,}16$ — тот же результат. Крайние прямые — наклоны $k_2 \pm 0{,}20$.

Второй способ — подбор степени. Для правильного n величина $\Delta H / a^n$ не должна зависеть от a.

a, мм	30	25	20	15	10
$n = \frac{1}{2}$	7,12	7,00	6,71	5,42	4,43
$n = 1$	1,30	1,40	1,50	1,40	1,40
$n = 2$	0,043	0,056	0,075	0,093	0,140

В таблице: при $n = 1$ значения 1,30 … 1,50 (разброс в пределах погрешности), при $n = \frac{1}{2}$ они медленно спадают (7,1 → 4,4), при $n = 2$ — изменяются втрое (0,043 → 0,14). Подходит $n_2 = 1$. Так же постоянно и $c/a \approx 0{,}05$ $\sqrt{\text{мм}}/\text{мм}$: потеря скорости пропорциональна длине пластинки.



Слева — $\Delta H(a)$ с прямой МНК $\Delta H = 1{,}28\,a + 2{,}2$ мм (свободный член в пределах погрешности равен нулю). Справа — те же точки в двойном логарифмическом масштабе: прямая МНК и крайние прямые.

Обратите внимание. (1) Закон $P \sim v^2$ верен, пока поле самих вихревых токов слабо искажает поле магнита: пластинка тонкая, проводимость $\sigma = 1/\rho$ не очень велика, скорость мала — то есть безразмерная величина $\mu_0 \sigma v\, d \ll 1$ (d — расстояние от магнита до пластинки, порядка размера пластинки). На больших скоростях токи «выталкивают» поле магнита, поле в пластинке растёт медленнее, чем v, и показатель становится меньше двух; формула $\sqrt{h} = \sqrt{H} - c$ при этом тоже перестала бы выполняться. Условие задачи («постоянная величина») этого не требует. (2) Квадратичная зависимость относится к *мгновенной* мощности. Время пролёта над пластинкой $\tau \sim a/v$, поэтому потерянная за пролёт энергия $\Delta W = P\tau \sim v$ растёт линейно, и над пластинкой постоянна потеря *скорости*, а не высоты и не энергии: $H - h = \text{const}$ не получится, потеря высоты $\Delta H \approx 2c\sqrt{H}$ растёт с H. (3) ΔH — разность близких чисел, её погрешность не меньше $\sqrt{2}\,\delta h$; при малых a она достигает 20 %, и эти точки надёжны меньше всего.

Проверка. Размерность в п. 1: $[\rho j^2] = \text{Ом} \cdot \text{м} \cdot \text{А}^2/\text{м}^4 = \text{Вт}/\text{м}^3$. Предел $v \to 0$: поле не меняется, $P \to 0$, как и должно быть. Знак: $P > 0$ при любом направлении $\vec{v}$, поскольку $\rho j^2 \geq 0$, и $P(-v) = P(v)$ — магнит, летящий назад, греет пластинку так же. Второй способ дал тот же результат. Размерность в п. 3: $[\beta] = \text{кг} \cdot \text{м/с}$, $[gM_1M_2] = \text{м} \cdot \text{кг}^2/\text{с}^2$, значит c имеет размерность $\sqrt{\text{длина}}$, как и $\sqrt{\text{мм}}$ на графике. Предел: без

пластинки $\beta = 0$, $c = 0$, $h = H$, $k = 1$, $b = 0$ — маятник без потерь; опыт даёт $b = -1{,}2$, потому что пластинка есть. Второй способ в обоих разделах согласован.

Смысл: вихревые токи греют проводник при движении магнита с мощностью, пропорциональной квадрату скорости, — как вязкое трение. Поэтому магнит поднимается ниже, чем стартовал; потеря скорости не зависит от скорости влёта и линейна по длине пластинки.

Ответ. 1) $n_1 = 2$, $P = \alpha v^2$ (плотность тока $\sim v$, джоулево тепло $\sim j^2$); 2) таблица $h(H)$ из 10 точек, $H = 101 \ldots 281$ мм (график $h(H)$ — в решении); 3) $\sqrt{h} = \sqrt{H} - c$, $c = \beta/\sqrt{2gM_1M_2}$; в координатах $(\sqrt{H}, \sqrt{h})$ зависимость линейна, $k_1 = 0{,}97 \pm 0{,}04$ (теория: 1; организаторы: $0{,}98 \pm 0{,}05$), $c = 1{,}53 \pm 0{,}03$ $\sqrt{\text{мм}}$, модель применима; 4) $h = 161; 165; 170; 179; 186$ мм при $a = 30; 25; 20; 15; 10$ мм; 5) $n_2 = 0{,}96 \pm 0{,}20 \approx 1$ (организаторы: $k_2 = 1{,}0 \pm 0{,}2$).