# Необычный элемент

**Задача 2.** [ВсОШ 2021/22, заключительный этап, 11 класс, практический тур, задача 2] «Необычный элемент».

Оборудование: 1) электрическая цепь, состоящая из источника с регулируемым напряжением и двух резисторов $R_1$ и $R_2$ ($R_1 < R_2$), соединённых по схеме «звезда» и подключённых к выводам «$A$», «$B$», «$C$»; 2) последовательно соединённые нелинейный элемент (припаян к зелёному проводу) и постоянный резистор $R_0$ (припаян к жёлтому проводу); 3) мультиметр, который разрешено использовать только в режимах вольтметра и омметра.

Важные комментарии:

1. Укажите в начале работы номера выданных Вам коробочки с выводами «$A$», «$B$», «$C$» и пакета с резистором и нелинейным элементом.
2. При всех экспериментах с нелинейным элементом ток через него должен протекать в направлении к зелёному проводу.
3. Запрещается прямое подключение нелинейного элемента к выводам коробочки. Если в результате Ваших действий нелинейный элемент выйдет из строя, то замене он не подлежит.
4. Показания индикатора на регулируемой части источника постоянного тока НЕ соответствуют напряжению источника.
5. Не забудьте изобразить в отчёте схему(ы), которую(ые) Вы использовали при выполнении работы.

С помощью выданного оборудования определите:

1. сопротивление резистора $R_0$;
2. к какому из выводов коробочки «$A$», «$B$», «$C$» подключён каждый из элементов, какова полярность подключения источника;
3. сопротивления резисторов $R_1$ и $R_2$ и диапазон напряжений источника;
4. зависимость силы тока от напряжения для нелинейного элемента и постройте график полученной зависимости;
5. дифференциальное сопротивление нелинейного элемента при на-

пряжении на нём 27,0 В;

6. дифференциальное сопротивление нелинейного элемента при токе через него 5,0 мА.

Примечание: дифференциальным сопротивлением называется отношение $\frac{dU}{dI}$, где $dU$ — малое приращение напряжения на элементе, а $dI$ — соответствующее ему малое приращение силы тока через элемент, взятые вблизи некоторой точки вольт-амперной характеристики.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это экспериментальная задача на «чёрный ящик» и на элемент с необычной вольт-амперной характеристикой (ВАХ). Внутри коробочки источник регулируемого напряжения $\varepsilon$ и два резистора $R_1 < R_2$, соединённые «звездой»: у всех трёх элементов один общий узел, а три свободных конца выведены на $A$, $B$, $C$.

Приборов два: вольтметр и омметр, амперметра нет. Поэтому используем три приёма.

Первый: вольтметр с огромным внутренним сопротивлением почти не берёт тока, значит, на резисторе без тока нет падения напряжения $IR$ и его концы имеют один потенциал; а на резисторе с током напряжение равно $IR$ — отсюда неизвестное сопротивление через известное $R_0$ (делитель напряжения).

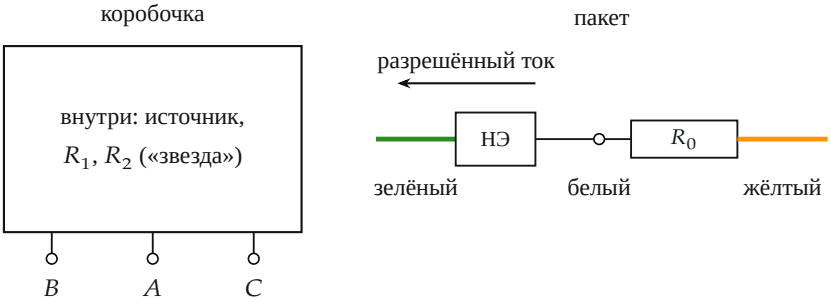
Второй: ток в последовательной цепи находим по закону Ома как напряжение на $R_0$, делённое на $R_0$.

Третий: нелинейный элемент включаем только через резистор $R_k$ — он ограничивает ток, а рабочая точка находится из уравнения $\varepsilon = U + I(R_k + R_0)$.

Класс задачи — косвенные измерения: определение скрытой схемы, делитель напряжения, ВАХ с падающим участком и дифференциальное сопротивление.

**Обозначения.** $R_0$ — резистор в пакете (между жёлтым и белым контактами); $R_1 < R_2$ — резисторы звезды; $\varepsilon$ — напряжение источника; $R_V$ — сопротивление вольтметра; $U$, $I$ — напряжение на нелинейном элементе и ток через него; $R_k$ — резистор звезды, через который включён НЭ ($R_1$ или $R_2$), $R_s = R_k + R_0$; $R_д = dU/dI$ — дифференциальное сопротивление; $U_{XY}$ — показание вольтметра, подключённого к выво-

дам $X$ и $Y$.




*Оборудование: коробочка с выводами $A$, $B$, $C$ (внутри источник и два резистора) и пакет: нелинейный элемент (НЭ) с зелёным проводом и резистор $R_0$ с жёлтым проводом; белый контакт — их общая точка.*

**Шаг 1. Сопротивление $R_0$ (вопрос 1).** Омметр подключаем к выводам самого резистора (жёлтому и белому контактам): нелинейный элемент присоединён к белому контакту с другой стороны, а его зелёный провод никуда не подключён, поэтому НЭ в измерении не участвует. Получаем

$$R_0 = (2{,}00 \pm 0{,}03)\ \text{кОм}.$$

Погрешность — точность прибора, около 1,5 %.

**Шаг 2. Что к какому выводу подключено, полярность (вопрос 2).** Включаем источник, ручку ставим в любое положение и вольтметром измеряем напряжения между выводами попарно ($U_{XY} = \varphi_X - \varphi_Y$ — разность потенциалов выводов $X$ и $Y$; так же и ниже):

$$U_{AB} = +22{,}7\ \text{В}, \qquad U_{AC} = 0{,}00\ \text{В}, \qquad U_{CB} = +22{,}9\ \text{В}.$$

Вольтметр почти не берёт тока, поэтому через оба резистора звезды ток не идёт, падение напряжения на них $IR = 0$, и выводы $A$ и $C$ имеют тот же потенциал, что общий узел: потому $U_{AC} = 0$. Между узлом и $B$ стоит источник, поэтому и $U_{AB}$, и $U_{CB}$ равны напряжению источника: 22,7 и 22,9 В отличаются из-за небольшого дрейфа напряжения за время измерений. Вывод: к $B$ подключён источник, а $A$ и $C$ — концы резисторов (какой из них $R_1$, а какой $R_2$ — шаг 3).

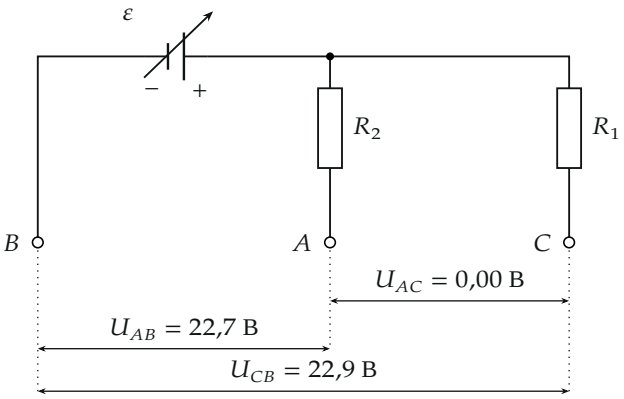



*Схема коробочки и показания вольтметра: стрелки — пары выводов, между которыми измерено напряжение. Выводы A и C имеют потенциал общего узла.* Проверим, что вольтметр не нагружает цепь. Включим его последовательно с $R_0$ между $A$ и $B$: показание остаётся 22,7 В. Падение на $R_0$ равно $U\,R_0/(R_V + R_0)$, и оно не заметно при разрешении 0,1 В, значит, $R_V \gg R_0 = 2$ кОм (оценка: $R_V \gtrsim 1$ МОм).

Омметр между $A$ и $C$ показывает $R_1 + R_2 = 10{,}3$ кОм: путь от $A$ к $C$ идёт только через два резистора звезды, а источник стоит на другой ветви (между узлом и $B$) и не мешает.

Полярность. $U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = +22{,}7$ В $> 0$: потенциал $B$ ниже потенциала узла, значит, $B$ — отрицательный полюс источника (на схеме коробочки со стороны $B$ короткая пластина). Знак показания зависит от того, каким щупом касаются вывода, поэтому на приборе проверяют: «+22,7» выходит, когда красный щуп на $A$ (или $C$), а общий (COM) — на $B$. (У организаторов в скобке сказано обратное — что общий щуп стоит на первой точке пары, — но тогда плюсом оказался бы $B$, а это противоречит их же ответу и правилу ниже; принимаем обычное $U_{XY} = \varphi_X - \varphi_Y$.) Проверка правилом задачи: ток через НЭ должен идти к зелёному проводу, а в опытах с ВАХ зелёный провод подключён к $B$; во внешней цепи ток течёт от плюса к минусу, то есть к $B$ он идёт, только если $B$ — минус. Все показания ниже ($U_{AC1}$, $U_{CB1}$, …) с этим знаком положительны.

**Шаг 3. Резисторы $R_1$, $R_2$ и диапазон напряжений (вопрос 3).** Идея: подключаем резистор $R_0$ известного сопротивления последовательно с

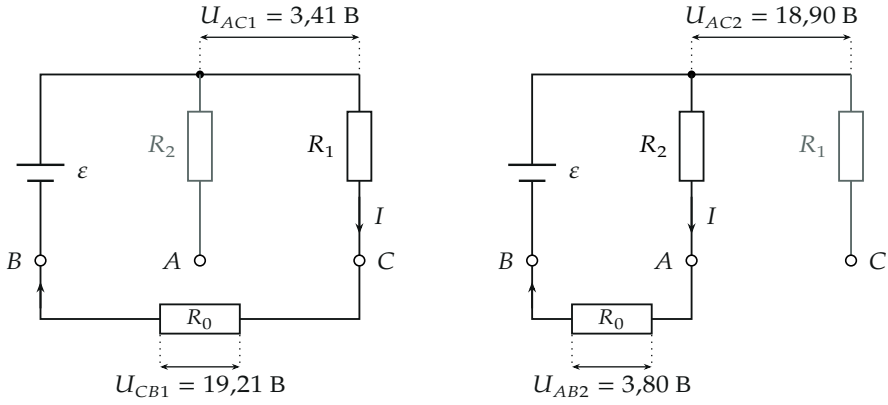
неизвестным — получается делитель напряжения; ток один на оба, а напряжения относятся как сопротивления: $U_x/U_0 = R_x/R_0$. Резистор в звезде, на котором тока нет, измерению не мешает.

*Резистор у вывода C*. Подключаем $R_0$ между $C$ и $B$ (белый контакт к $C$, жёлтый к $B$): цепь «узел — резистор $C$ — $R_0$ — $B$», резистор у $A$ тока не несёт. Вольтметр на $R_0$ даёт $U_{CB1} = 19{,}21$ В, поэтому ток $I = U_{CB1}/R_0 = 9{,}6$ мА. Потенциал $A$ равен потенциалу узла (тока на резисторе нет), поэтому $U_{AC1} = 3{,}41$ В — это напряжение на резисторе у $C$. По закону Ома для него

$$R_C = \frac{U_{AC1}}{I} = R_0\,\frac{U_{AC1}}{U_{CB1}} = 2000 \cdot \frac{3{,}41}{19{,}21}\ \text{Ом} = 355\ \text{Ом}.$$

*Резистор у вывода A*. Подключаем $R_0$ между $A$ и $B$ (белый к $A$, жёлтый к $B$): $U_{AB2} = 3{,}80$ В на $R_0$, ток $I = 1{,}90$ мА, напряжение на резисторе у $A$ равно $U_{AC2} = 18{,}90$ В (теперь тока нет у $C$):

$$R_A = R_0\,\frac{U_{AC2}}{U_{AB2}} = 2000 \cdot \frac{18{,}90}{3{,}80}\ \text{Ом} = 9{,}95\ \text{кОм}.$$




а) $R_0$ между $C$ и $B$

б) $R_0$ между $A$ и $B$

*Делитель напряжения: а) ток идёт через резистор у $C$ и $R_0$; б) через резистор у $A$ и $R_0$. Серым показан резистор без тока. Стрелки напряжений —*

*показания вольтметра.* Меньшее сопротивление $R_1 = R_C = 355$ Ом подключено к выводу $C$, большее $R_2 = R_A = 9{,}95$ кОм — к $A$ (схема коробочки выше). Погрешность: главный вклад даёт $R_0$ (1,5 %), вольтметр с шагом 0,01 В добавляет доли процента, поэтому

$$R_1 = (355 \pm 6)\ \text{Ом}, \qquad R_2 = (9{,}95 \pm 0{,}15)\ \text{кОм}.$$

Контроль: $R_1 + R_2 = 10{,}30$ кОм — как показал омметр; суммы напряжений $19{,}21 + 3{,}41 = 22{,}62$ В и $3{,}80 + 18{,}90 = 22{,}70$ В — это напряжение источника в двух опытах, и оно согласуется с измеренным 22,7 В.

*Диапазон напряжений.* Источник не нагружен (вольтметр между $C$ и $B$ ток не берёт), поэтому вольтметр показывает его напряжение $\varepsilon$. Поворачивая ручку, получаем непрерывный ряд значений от 21,9 до 43,0 В, а при выключенном источнике на выходе остаётся 19,6 В. Диапазон: 19,6 … 43,0 В. (У части источников верхняя граница 44,0 В, а нижняя ниже — 12,7 В; метод тот же.)

**Шаг 4. Схема снятия ВАХ (вопрос 4).** Нелинейный элемент подключаем зелёным проводом к $B$, а $R_0$ — жёлтым проводом к выводу резистора звезды $X$ ($A$ или $C$). Получается последовательная цепь: узел → $R_k$ → $R_0$ → НЭ → $B$, ток идёт к зелёному проводу, как требуют правила. Зачем так. Прямое подключение НЭ к коробочке запрещено: в открытом состоянии ток ничем не ограничен, и элемент сгорит. Резистор $R_k$ ограничивает ток, а $R_0$ заменяет амперметр: напряжение $U_0$ на нём (вольтметр между белым и жёлтым контактами) даёт ток $I = U_0/R_0$, а напряжение $U$ на НЭ измеряем напрямую вольтметром между зелёным и белым контактами. По второму правилу Кирхгофа $\varepsilon = U + I(R_k + R_0)$.

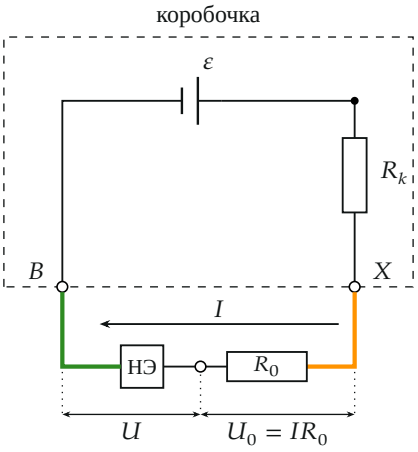



*Схема опыта: пунктиром обведена коробочка, X — вывод A (резистор $R_2$) или C (резистор $R_1$). Стрелки — вольтметры; ток идёт к зелёному проводу.*

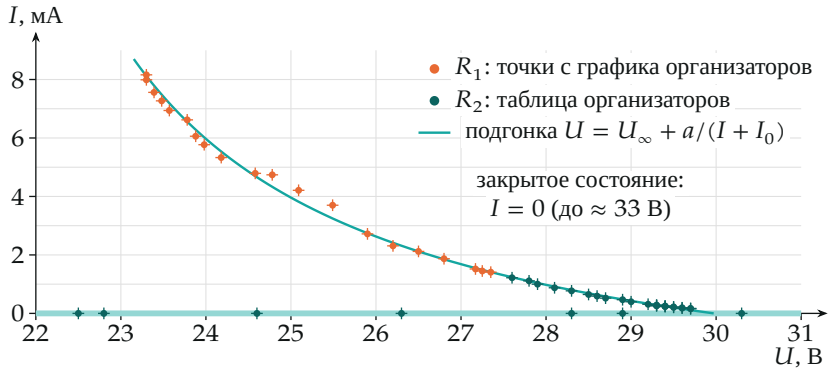
Ручку источника поворачиваем понемногу и в каждом положении записываем пару $(U, I)$. Опыт делаем дважды: с $R_1$ (выводы $C$ и $B$) и с $R_2$ (выводы $A$ и $B$). Вольтметр при малых токах переключаем на шкалу 200 мВ.

**Шаг 5. Результаты и график ВАХ.** При малых $\varepsilon$ (22 … 33 В) ток не идёт: вольтметр на $R_0$ показывает ноль, а на НЭ приложено всё напряжение источника, $U = \varepsilon$. Назовём это состояние «закрытым». При напряжении источника около 33 В элемент «открывается» скачком: ток появляется, а напряжение на НЭ падает до $\approx$ 26 В (опыт с $R_1$) или $\approx$ 30 В (с $R_2$). Дальше при росте $\varepsilon$ плавно растёт ток, а напряжение на НЭ *падает*; при уменьшении $\varepsilon$ точка возвращается вверх по этой ветви и при некотором $\varepsilon$ элемент скачком закрывается. Итак, ВАХ состоит из двух частей: отрезка на оси $U$ (ток нуль, до $\approx$ 33 В) и плавной падающей ветви «гиперболического» характера. Данные организаторов для $R_2$ (пары

$U$ В; $I$ мкА, в порядке измерения; ток 0 — закрытое состояние):

| $U$, В | $I$, мкА | $U$, В | $I$, мкА | $U$, В | $I$, мкА |
|---|---|---|---|---|---|
| 22,5 | 0 | 29,6 | 192 | 29,0 | 398 |
| 22,8 | 0 | 29,5 | 206 | 28,9 | 468 |
| 24,6 | 0 | 29,5 | 222 | 28,7 | 522 |
| 26,3 | 0 | 29,4 | 235 | 28,6 | 592 |
| 28,3 | 0 | 29,4 | 239 | 28,5 | 647 |
| 28,9 | 0 | 29,4 | 253 | 28,3 | 771 |
| 30,3 | 0 | 29,3 | 260 | 28,1 | 876 |
| 29,7 | 170 | 29,3 | 268 | 27,9 | 1000 |
| 29,7 | 158 | 29,3 | 284 | 27,8 | 1114 |
| 29,6 | 180 | 29,2 | 313 | 27,6 | 1219 |

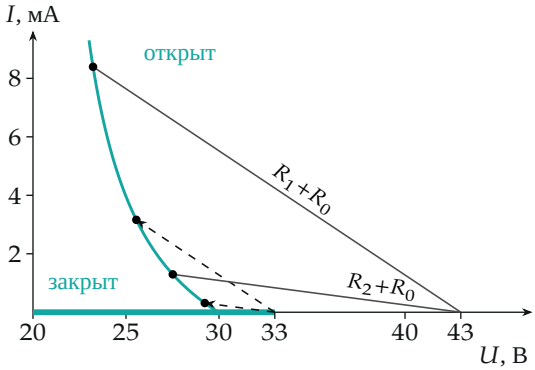
Опыт с $R_1$ даёт участок шире — примерно от 23 до 28 В и от 8 до 1 мА; опыт с $R_2$ — от 27,0 до 29,5 В и от 1,3 до 0,15 мА. Ветви перекрываются и дополняют друг друга. Таблицы опыта с $R_1$ у организаторов нет, поэтому его точки сняты с их графика ВАХ (точность съёма $\pm 0{,}05$ В и $\pm 0{,}1$ мА) — это не наши измерения, а оцифровка; точки $R_2$ — по таблице. На графике оба набора лежат на одной кривой, а закрытое состояние — отрезок на оси $U$.




*ВАХ нелинейного элемента. Кресты — погрешности, вдоль оси I они меньше значка. Падающая ветвь описывается гиперболой $U = U_\infty + a/(I + I_0)$ с*

*$U_\infty = 20{,}1$ В, $a = 38{,}8$ В·мА, $I_0 = 3{,}9$ мА (разброс точек около 0,09 В); при $I \to 0$ она даёт 30,0 В.*

**Шаг 6. Почему скачок и зачем два резистора.** Для данного $\varepsilon$ рабочая точка лежит на пересечении ВАХ и нагрузочной прямой $I = (\varepsilon - U)/R_s$ с наклоном $-1/R_s$, проходящей через точку $U = \varepsilon$ на оси $U$. Пока $\varepsilon < 33$ В, пересекается только закрытое состояние. При $\varepsilon \approx 33$ В закрытое состояние исчезает, и точка скачком переходит по нагрузочной прямой на падающую ветвь: для $R_1 + R_0 = 2{,}36$ кОм — в точку (25,6 В; 3,1 мА), для $R_2 + R_0 = 11{,}95$ кОм — в (29,3 В; 0,3 мА); организаторы наблюдали $\approx 26$ и $\approx 30$ В. Далее нагрузочные прямые с $\varepsilon$ до 43 В выводят точку на ветви до токов около 8 мА ($R_1$) и 1,3 мА ($R_2$). Зачем два резистора. Изменим $\varepsilon$ на $d\varepsilon$: из $d\varepsilon = dU + R_s\, dI$ и $dU = R_д\, dI$ получаем $dU = d\varepsilon\, R_д/(R_s + R_д)$. Пока $R_s > |R_д|$, знаменатель положителен и каждому $\varepsilon$ отвечает одна рабочая точка — ВАХ снимается плавно. Малым $R_1 + R_0$ можно получить большие токи, но при малых токах $|R_д|$ растёт (гипербола, шаг 7) и становится сравнимым с $R_1 + R_0$, а точка начинает «проскакивать» — поэтому малые токи снимают с $R_2 + R_0 = 11{,}95$ кОм, у которого запас по $R_s$ велик, а шаг $d\varepsilon = 1$ В даёт сдвиг $dU \approx -0{,}1$ В.




*Качественная картина. Ось U начинается с 20 В. Бирюзовым — ВАХ (отрезок закрытого состояния, $I = 0$, и падающая ветвь), штрих — нагрузочные прямые при $\varepsilon = 33$ В со стрелкой скачка, сплошные — при $\varepsilon = 43$ В; точки — рабочие точки.*

**Шаг 7. Дифференциальное сопротивление (вопросы 5, 6).** $R_д = dU/dI$ — наклон касательной к ВАХ. Он считается по малому участку:

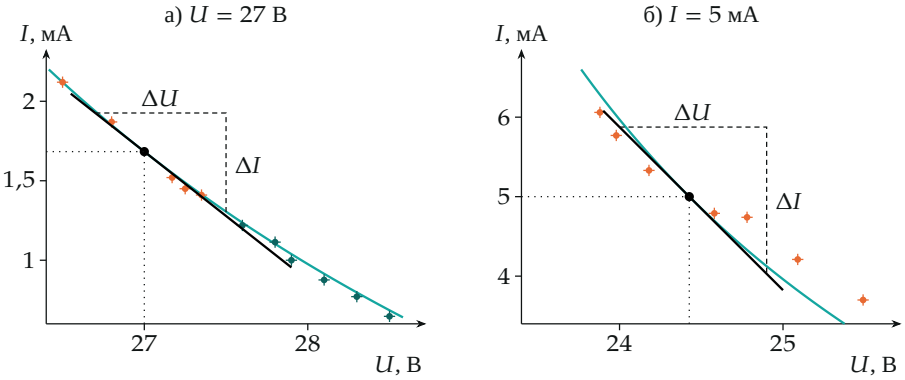
в точке измеряем плотно (шаг по $U$ порядка 0,1 В, самая мелкая шкала вольтметра до 200 В), строим график на этом участке и проводим касательную.

*Вопрос 5:* $U = 27{,}0$ *В.* Такому $U$ отвечают две точки ВАХ. В закрытом состоянии $I = 0$ при любом $U$, то есть $dI/dU = 0$, и $R_д$ бесконечно велико (определить его нельзя). На падающей ветви — по касательной, ветвь снимают в обоих опытах ($R_1$ и $R_2$):

$$R_{д1} = \frac{\Delta U}{\Delta I} = (-1{,}34 \pm 0{,}04)\ \text{кОм}.$$

*Вопрос 6:* $I = 5{,}0$ *мА.* Этот ток достигается только при опыте с $R_1$ (в опыте с $R_2$ ток не больше 1,3 мА), поэтому берём точки только оттуда:

$$R_{д2} = (-540 \pm 10)\ \text{Ом}.$$




*Касательные: а) в точке* $U = 27$ *В; б) в точке* $I = 5$ *мА. Точки те же, что на графике ВАХ, штрих — катеты треугольника* $\Delta U$, $\Delta I$; $R_д = \Delta U/\Delta I$. *Касательные проведены к гиперболе подгонки.* Сверка по гиперболе из шага 5: $R_д = -a/(I + I_0)^2$. При $U = 27$ В на ней $I = 1{,}72$ мА и $R_д = -38{,}8/(1{,}72 + 3{,}9)^2 = -1{,}23$ кОм; при 5 мА — $-38{,}8/(5 + 3{,}9)^2 = -0{,}49$ кОм (единицы: В/мА = кОм). Локальная прямая по точкам таблицы при 27,6 … 28,1 В даёт около $-1{,}4$ кОм. Эти значения лежат в пределах 0,7 … 1,7 кОм и 0,3 … 0,8 кОм и согласуются с ответом организаторов с точностью до 10 … 20 %: подгонка к грубым точкам сглаживает,

а плотные измерения шагом 0,1 В дают $-1{,}34$ кОм и $-540$ Ом — они идут в ответ.

**Обратите внимание.** (1) НЭ нельзя подключать к коробочке напрямую и нельзя пускать через него ток против направления к зелёному проводу: в открытом состоянии ток ограничивает только $R_k + R_0$, а заменить сгоревший элемент нельзя. (2) Показание индикатора на ручке источника не равно его напряжению — напряжение всегда измеряем вольтметром; вольтметр годится, если $R_V \gg$ сопротивления участка, иначе делитель напряжения «врёт». (3) $R_д = dU/dI$ — наклон ВАХ, а не отношение $U/I$: на падающей ветви он отрицателен (ток растёт, а напряжение падает), а в закрытом состоянии он бесконечно велик.

**Проверка.** Размерность: $R_C = R_0 U_{AC1}/U_{CB1}$ — отношение напряжений безразмерно, получается ом; $[a/(I + I_0)^2] = \text{В} \cdot \text{мА}/\text{мА}^2 = \text{В}/\text{мА} = \text{кОм}$. Согласование: $R_1 + R_2 = 10{,}30$ кОм совпало с омметром (10,3 кОм); напряжение источника, найденное из суммы напряжений в двух опытах, совпало с $U_{AB}$. Верхняя граница диапазона: для точек ВАХ $\varepsilon = U + I(R_k + R_0)$, и для (27,6 В; 1,22 мА) с $R_2$ получаем 42,2 В, для (23,3 В; 8,1 мА) с $R_1$ — 42,4 В, то есть не больше 43,0 В, как и должно быть. Предсказанные скачки (25,6 и 29,3 В) близки к наблюдаемым (26 и 30 В). Второй способ для $R_д$ — гипербола и локальная прямая — дал тот же порядок и знак.

Смысл: у НЭ ток растёт при *падении* напряжения (отрицательное дифференциальное сопротивление), поэтому его включают только через резисторы, которые ограничивают ток и удерживают рабочую точку; скачки при открытии и закрытии возникают потому, что при $\varepsilon \approx 33$ В закрытое состояние пропадает, а рабочая точка переходит по нагрузочной прямой на падающую ветвь.

**Ответ.** 1) $R_0 = (2{,}00 \pm 0{,}03)$ кОм; 2) $B$ — источник (отрицательный полюс), $A$ — резистор $R_2$, $C$ — резистор $R_1$; 3) $R_1 = (355 \pm 6)$ Ом, $R_2 = (9{,}95 \pm 0{,}15)$ кОм, диапазон напряжений 19,6 … 43,0 В; 4) ВАХ — график шага 5: отрезок $I = 0$ до $\approx 33$ В и падающая ветвь от $\approx 30$ В ($I \to 0$) до $\approx 23$ В (8 мА); 5) $R_д = (-1{,}34 \pm 0{,}04)$ кОм; 6) $R_д = (-540 \pm 10)$ Ом.